Operon - listopad 2014 - poziom podstawowy

Zadania zamknięte

Zad 1. $\left(2\sqrt{5}-3\right)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2-2\cdot 2\sqrt{5}\cdot 3+3^2=20-12\sqrt{5}+9=29-12\sqrt{5}$ **(D)**

Zad 2. $f(x)=\begin{cases}2x+4 & x\in(-\infty;\ -1\rangle\\ x^2-1 & x\in(-1;\ 3)\\ x+5 & x\in\langle 3;\ +\infty)\end{cases}$

$2x+4=0 \qquad 2x=-4 \qquad x=-2 \qquad -2\in(-\infty;\ -1\rangle$

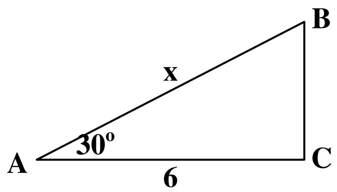
$x^2-1=0 \qquad x^2=1 \qquad x=1 \vee x=-1 \qquad 1\in(-1;\ 3) \quad -1\notin(-1;\ 3)$

$x+5=0 \qquad x=-5 \qquad -5\notin\langle 3;\ +\infty)$

mamy dwa rozwiązania $x=-2$ oraz $x=1$ **(C)**

Zad 3. $y=\sqrt{2}x-2 \quad \sqrt{2}x-2=0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2}x=2 \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ **(D)**

Zad 4.



$\cos 30°=\frac{6}{x} \qquad \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{6}{x}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x\sqrt{3}=6\cdot 2 \qquad x\sqrt{3}=12$

$x=\frac{12}{\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$ **(A)**

Zad 5. $x^2+(y+2)^2=4$

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad r^2=4 \qquad r=\sqrt{4}=2 \qquad -b=2 \ \Rightarrow\ b=-2$ **(B)**

Zad 6. $|x+4|>2 \qquad x+4>2 \quad \wedge \quad x+4<-2$

$x>2-4 \quad \wedge \quad x<-4-2$

$x>-2 \quad \wedge \quad x<-6$

(A)

Zad 7. $l\colon -2x+5y+1=0 \qquad k\colon y=ax+b$

$-2x+5y+1=0$

$5y=2x-1|:5$

$y=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5} \qquad a=\frac{2}{5}$ to dla prostej prostopadłej $a=-\frac{5}{2} \qquad \frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=-1$ **(C)**

Zad 8. $\{-10;\ -6;\ -2\} \qquad r=-6-(-10)=4$

$a_{40}=a_1+39\cdot r=-10+39\cdot 4=-10+156=146$ **(B)**

Zad 9. Ciąg arytmetyczny to $\{\sqrt{4};\ \sqrt{1};\ \sqrt{0}\}=\{2;\ 1;\ 0\} \quad r=-1$ **(D)**

Zad 10. $\{x-3;\ 7;\ 14\}$ - ciąg geometryczny $q=\frac{a_3}{a_2}=\frac{14}{7}=2$

$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{7}{x-3}=2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{7}{x-3}=2|\cdot(x-3) \qquad \Rightarrow \qquad 7=2(x-3)$

$2x-6=7 \qquad \Rightarrow \qquad 2x=13 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{13}{2}$ **(C)**

Zad 11. $a=3\sqrt{27}+9\sqrt{3}+\sqrt{243}=3\sqrt{9\cdot 3}+9\sqrt{3}+\sqrt{9\cdot 9\cdot 3}=3\cdot 3\sqrt{3}+9\sqrt{3}+3\cdot 3\sqrt{3}=$

$=9\sqrt{3}+9\sqrt{3}+9\sqrt{3}=27\sqrt{3}=3^3\cdot 3^{\frac{1}{2}}=3^{3+\frac{1}{2}}=3^{\frac{6}{2}+\frac{1}{2}}=3^{\frac{7}{2}}$ **(C)**

Zad 12. $f(x)=\sqrt{15+3x}-\sqrt{3-x}$

Pierwiastek jest określony dla liczb nieujemnych czyli:

$15+3x\geq 0 \quad \wedge \quad 3-x\geq 0$

$3x\geq -15|:3 \quad \wedge \quad -x\geq -3|:(-1)$

$x\geq -5 \quad \wedge \quad x\leq 3 \qquad \Rightarrow \qquad x\in\langle -5;\ 3\rangle$ **(D)**

Zad 13. $f(x)=|x|-12 \qquad |x|\geq 0$ dla każdego $x\in R$

czyli zbiór wartości funkcji $f(x)=|x| \quad \langle 0;\ +\infty)$

Tak więc zbiór wartości dla $f(x)=|x|-12$ to $\langle -12;\ +\infty)$ **(B)**

Zad 14. $16 + x^4 = 0$ x^4 jest liczba nieujemną, po dodaniu 16 suma ≥ 16. Tak więc równanie nie może nieć rozwiązania **(D)**

Zad 15. $7^{\frac{2}{3}}$ liczbą odwrotną jest $\frac{1}{7^{\frac{2}{3}}} = 1 : 7^{\frac{2}{3}} = 7^0 : 7^{\frac{2}{3}} = 7^{0-\frac{2}{3}} = 7^{-\frac{2}{3}}$ **(D)**

Zad 16. $a = \left|1{,}7 - \sqrt{3}\right|$ trzeba zauważyć że $1{,}7 - \sqrt{3} < 0$ (można sprawdzić kalkulatorem)
dla liczby ujemnej $|a| = -a$ tak więc $\left|1{,}7 - \sqrt{3}\right| = -\left(1{,}7 - \sqrt{3}\right) = -1{,}7 + \sqrt{3}$ **(C)**

Zad 17. $f(x) = x^2$ przykładowo mamy $f(0) = 0^2 = 0$.
po przesunięciu o 6 w lewo mamy: $g(-6) = 0$ czyli $g(x + 6) = f(x)$ **(A)**

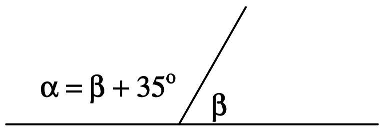
Zad 18. $\mathrm{W} = \mathrm{x}^3 - 2\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} - 8$
$\mathrm{x}^3 - 2\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} - 8 = \mathrm{x}^2(\mathrm{x} - 2) + 4(\mathrm{x} - 2) = (\mathrm{x} - 2)(\mathrm{x}^2 + 4)$ **(B)**

Zad 19. $f(x) = \left(3 - \frac{1}{3}m\right)x + 3m - 1$ ma być malejąca więc $3 - \frac{1}{3}m < 0$
$-\frac{1}{3}m < -3 | \cdot (-3) \quad \Longrightarrow \quad m > 9$ czyli $m \in (9; \quad +\infty)$ **(A)**

Zad 20. $(m + 5)^2 \leq 0$ kwadrat jakiejkolwiek liczby nie jest mniejszy od zera. Może jednak być
$m + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = -5$ **(D)**

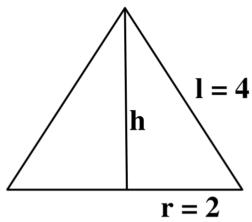
Zad 21. Dziesięciokąt foremny: $360° : 10 = 36°$
Taki dziesięciokąt można podzielić na 10 trójkątów równoramiennych z kątem przy wierzchołku $36°$.
Tak więc suma miar kątów przy podstawie w takim trójkącie wynosi $180° - 36° = 144°$ i to jest miarą kąta dziesięciokąta **(B)**

Zad 22.



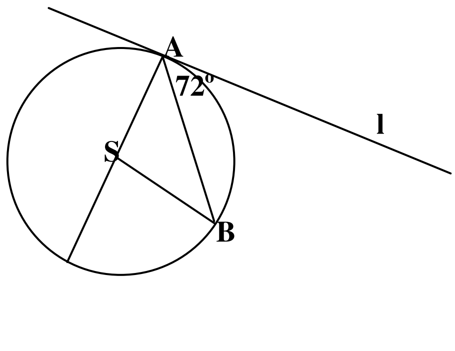
$\beta + \beta + 35° = 180°$
$2\beta = 180° - 35°$
$2\beta = 145° \qquad \beta = \frac{145°}{2} = 72{,}5°$ **(B)**

Zad 23.



W trójkącie równobocznym $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
$h = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi 2^2 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ **(A)**

Zad 24. Styczna jest prostopadła do promienia.
$\sphericalangle SAB = 90° - 72° = 18°$
Trójkąt ABS równoramienny $\sphericalangle ABS = 18°$
$\sphericalangle ASB = 180° - 2 \cdot 18° = 180° - 36° = 144°$



(C)

Zad 25. $\cos\alpha = \frac{5}{7}$ wiemy że $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\sin^2\alpha + \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sin^2\alpha = 1 - \frac{25}{49} \quad \Longrightarrow \quad \sin^2\alpha = \frac{24}{49}$
$\sin\alpha = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 6}}{7} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ **(C)**

Zadania otwarte

Zad 26. $-9x^2+6x-1<0$

$\Delta=6^2-4\cdot(-9)\cdot(-1)=36-36=0$

$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{2\cdot(-9)}=\frac{1}{3}$ Z powodu -9 przy x^2 wykres ma gałęzie są do dołu więc cały zbiór wartości z wyjątkiem wartości 0 dla $x=\frac{1}{3}$ jest mniejszy od zera.

Odpowiedź: $x\in\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\ +\infty\right)$. Można też tak $x\in R\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Zad 27. $A=(x;\ y)\quad B=(-6;\ 14)\quad S=(-3;\ 8)$

środek odcinka $x=\frac{x_A+x_B}{2};\quad y=\frac{y_A+y_B}{2}$

$-3=\frac{x-6}{2}|\cdot 2\quad\Rightarrow\quad -6=x-6\quad\Rightarrow\quad -x=6-6\quad\Rightarrow\quad x=0$

$8=\frac{y+14}{2}|\cdot 2\quad\Rightarrow\quad 16=y+14\quad\Rightarrow\quad -y=14-16\quad\Rightarrow\quad y=2$

Odpowiedź: współrzędne początku odcinka $A=(0;\ 2)$

Zad 28. $x-$ liczba dziewcząt

$3x-$ liczba chłopców

$x+3x=4x-$ liczba uczniów w klasie

Po dojściu do klasy 2 dziewcząt:

$x+2-$ liczba dziewcząt (chłopcy bez zmian)

$4x+2-$ liczba uczniów w klasie

$30\%(4x+2)=x+2-$ dziewczyny stanowią 30% klasy

$0{,}3(4x+2)=x+2|\cdot 10$

$3(4x+2)=10x+20\quad\Rightarrow\quad 12x+6=10x+20\quad\Rightarrow\quad 12x-10x=20-6$

$2x=14|:2\quad\Rightarrow\quad x=7\quad\Rightarrow\quad 3x=3\cdot 7=21$

Odpowiedź Na początku było 7 dziewcząt i 21 chłopców.

Zad 29. $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{6}{5}$ wykazać że $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0{,}22$

Ze wzoru $(a+b)^2$ mamy: $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha$

$\left(\frac{6}{5}\right)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\frac{36}{25}=1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{36}{25}-1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{11}{25}|:2$

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{11}{50}=0{,}22$ Co należało wykazać.

Zad 30. $a_3=a_1\cdot q^2=6\qquad a_5=a_1\cdot q^4=24$

$a_1\cdot q^2=6\quad\Rightarrow\quad a_1=\frac{6}{q^2}$

$a_1\cdot q^4=24\quad\Rightarrow\quad \frac{6}{q^2}\cdot q^4=24\quad\Rightarrow\quad 6\cdot q^2=24$

$q^2=\frac{24}{6}=4\quad\Rightarrow\quad q=\sqrt{4}=2$ Wyrazy ciągu są dodatnie więc $q\neq -2$

$a_1=\frac{6}{q^2}=\frac{6}{2^2}=\frac{6}{4}=1{,}5$

Odpowiedź: Pierwszy wyraz ciągu $a_1=1{,}5$ a iloraz ciągu $q=2$.

Zad 31. Czterokrotny rzut kostką to $\overline{\overline{\Omega}}=6^4=1296$

analogicznie jak rzut dwa razy kostką to $6\cdot 6=36$

Zdarzenie A to liczba oczek mniejsza od 23.

Zauważmy że maksymalna liczba oczek to $6+6+6+6=24$

Tak więc dość łatwo wypisać zdarzenia elementarne do zdarzenia A' - wypadło 23 lub 24 oczka.

$A' = \{(6;6;6;6);\ (6;6;6;5);(6;6;5;6);(6;5;6;6);(5;6;6;6)\}$ $\overline{\overline{A'}} = 5$

$P(A') = \frac{5}{1296}$ $\qquad$ $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{5}{1296} = \frac{1291}{1296}$

Odp: Prawdopodobieństwo wypadnięcia mniej niż 23 oczek w czterech rzutach kostką wynosi $\frac{1291}{1296}$

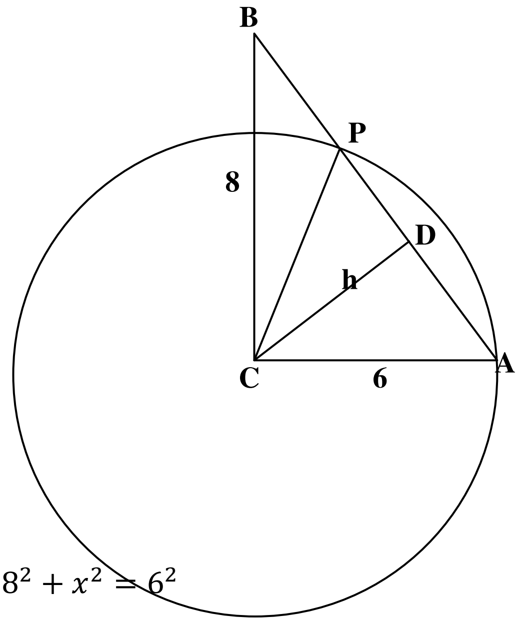
Zad 32. Z twierdzenia Pitagorasa obliczymy |AB|

$6^2 + 8^2 = (AB)^2$

$(AB)^2 = 36 + 64$

$(AB)^2 = 100$

$|AB| = \sqrt{100} = 10$



Obliczymy pole trójkąta ABC

$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = \frac{48}{2} = 24$

Mając pole i długość |AB| obliczymy wysokość h

$24 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h \quad \Longrightarrow \quad 5h = 24$

$h = \frac{24}{5} = 4{,}8$

Trójkąt ACD jest prostokątny więc policzymy długość |AD| = **x**

$4{,}8^2 + x^2 = 6^2$

$x^2 = 36 - 23{,}04 = 12{,}96$

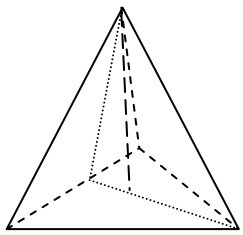
$x = \sqrt{12{,}96} = 3{,}6$

|AD| = |DP| = x $\quad AP = 2x = 2 \cdot 3{,}6 = 7{,}2$

$|BP| = |AB| - 7{,}2 = 10 - 7{,}2 = 2{,}8$

Odpowiedź: Długość odcinka BP wynosi 2,8

Zad 33.



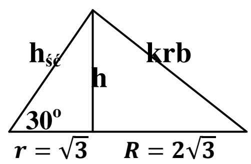
$R = 2\sqrt{3}$ promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym

$R = \frac{2}{3}h \quad \Longrightarrow \quad h = R \cdot \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad h_p = 2\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = 3\sqrt{3}$

$r = \frac{1}{2}R = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ promień okręgu wpisanego w trójkąt

Z trójkąta prostokątnego: $h_{śc}$, h, r, z kątem 30° obliczamy:

$\cos 30° = \frac{r}{h_{śc}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{h_{śc}}$



$h_{śc} = 2$ wysokość ściany bocznej

$\sin 30° = \frac{h}{h_{śc}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{h}{2} \quad \Longrightarrow \quad h = 1$

$h = 1$ wysokośc ostrosłupa

W podstawie która jest trójkątem równobocznym mamy już obliczona wysokość $h_p = 3\sqrt{3}$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ wysokość trójkąta równobocznego $3\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\Big|\cdot 2 \quad \Longrightarrow \quad 6\sqrt{3} = a\sqrt{3}\Big|:\sqrt{3} \qquad a = 6$

$P_{pb} = 3 \cdot \frac{1}{2}a \cdot h_{śc} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 18$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_p \cdot h = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 1 = 3\sqrt{3}$

Odpowiedź: Pole powierzchni bocznej wynosi 18 a objętość $3\sqrt{3}$