Matura poprawkowa sierpień 2014r

<u>*Zadania zamknięte*</u>

Zad 1. Liczba 7 jest na środku przedziału więc $|x-7|$ oczywiście $22-7=15$ oraz $7-(-8)=15$

$|x-7|<15$ bo mamy przedział między liczbami -8 i 22 a nie przedziały na zewnątrz **(A)**

Zad 2. $\frac{1}{2}\cdot 2^{2014}=2^{-1}\cdot 2^{2014}=2^{2014-1}=2^{2013}$ **(A)**

Zad 3. $\log_3 2=c$ w definicji logarytmu mamy $\log_a b=c\Leftrightarrow a^c=b$ czyli$3^c=2$ **(B)**

Zad 4. $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{15}=5-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+3+2\sqrt{15}=8-2\sqrt{15}+2\sqrt{15}=8$ **(B)**

Zad 5. $x-$ całe oszczędności

$\frac{1}{2}x-$ zostało po prezencie dla Maćka

$0{,}1\cdot\frac{1}{2}x=0{,}1\cdot 0{,}5x=0{,}05$ $-$prezent dla Dominiki

$\frac{1}{2}x-0{,}05x=0{,}5x-0{,}05x=0{,}45x=45\%x$ zostało po prezencje dla Dominiki **(C)**

Zad 6. $\frac{x-5}{7-x}=\frac{1}{3}$ $\qquad x\neq 7$

$3(x-5)=7-x$

$3x-15=7-x$ $\qquad 3x+x=7+15$ $\qquad 4x=22|:4$ $\qquad x=5{,}5=\frac{11}{2}$ **(B)**

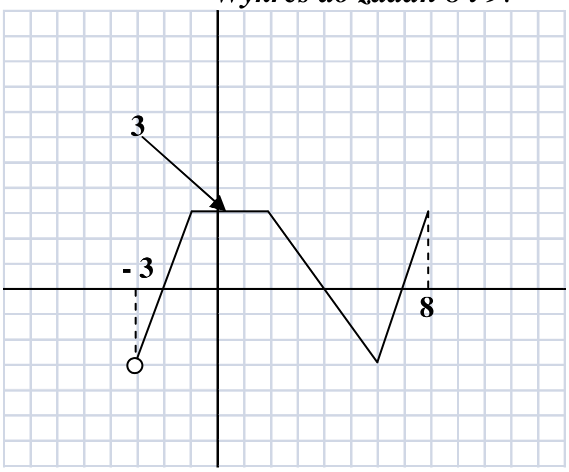
Zad 7. $a=\frac{b}{c-b}|\cdot(c-b)$ $\qquad a(c-b)=b$

$ac-ab=b$ $\qquad -ab-b=-ac|\cdot(-1)$

$ab+b=ac$ $\qquad b(a+1)=ac|:(a+1)$

$b=\frac{ac}{a+1}$ **(B)**

Wykres do zadań 8 i 9.



Zad 8. Dziedzinę funkcji widzimy na osi OX $x\in(-3;\ \ 8\rangle$ **(D)**

Zad 9. Wartości funkcji szukamy na osi OY i największa to $y=3$. **(A)**

Zad 10. $f(x)=(x-2)(x+4)=x^2+4x-2x-8=x^2+2x-8$

tak więc widzimy że przy x^2 jest znak **+** (nie ma minusa) więc gałęzie są do góry

szukając miejsc zerowych mamy $x-2=0\quad\vee\quad x+4=0$ czyli:

$x_1=2$ $\qquad x_2=-4$ **(D)**

Zad 11. $Zw=(-\infty;\ \ -3\rangle$ gałęzie muszą być do dołu gdyż zbiór wartości biegnie do $-\infty$ $-$ przy x^2,

teraz znając postać kanoniczną funkcji kwadratowej $f(x)=a(x-p)^2+q$

gdzie q to współrzędna Y wierzchołka czyli tu mamy $q=-3$ **(C)**

Zad 12. $f(x)=ax+b$ Jest rosnąca więc $a>0$ Dodatnie miejsce zerowe więc $b<0$ chociażby z powodu

że $mz=-\frac{b}{a}$ **(D)**

Zad 13. $a_1=3$ $\qquad S_{10}=35$ $\qquad S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10$

$35=\frac{3+a_{10}}{2}\cdot 10$ $\qquad 35=(3+a_{10})\cdot 5$

$15+5a_{10}=35$ $\qquad\Rightarrow\qquad 5a_{10}=35-15$

$5a_{10}=20|:5$ $\qquad\Rightarrow\qquad a_{10}=4$ **(B)**

Zad 14. $a_n = -\frac{3^n}{4}$ ciąg geometryczny

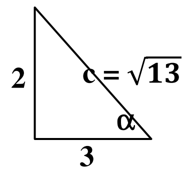
$a_{n+1} = -\frac{3^{n+1}}{4}$ $\quad q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-\frac{3^{n+1}}{4}}{-\frac{3^n}{4}} = -\frac{3^{n+1}}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3^n}\right) = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3$ **(D)**

Zad 15. $3\tan\alpha = 2 |:3$ $\qquad \tan\alpha = \frac{2}{3}$ $\qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin\alpha + \cos\alpha$

I. Porządnie czyli rozwiązać układ równań: $\begin{cases} \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{3} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$

II. Narysować trójkąt prostokątny zgodnie z danymi,
z Twierdzenia Pitagorasa wyliczyć c = $\sqrt{\mathbf{13}}$



$2^2 + 3^2 = c^2$ $\qquad c^2 = 4 + 9 = 13$

$c = \sqrt{13}$ $\quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ $\qquad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}$ **(C)**

Zad 16. $R = 8$ $\qquad R = \frac{2}{3}h$

więc $h = R \cdot \frac{3}{2} = 8 \cdot \frac{3}{2} = 4 \cdot 3 = 12$ **(C)**

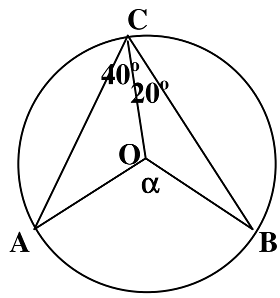
Zad 17. Trójkąty AOC i BOC są równoramienne więc

$\sphericalangle CAO = \sphericalangle ACO = 40°$ podobnie $\sphericalangle CBO = \sphericalangle BCO = 20°$

$\sphericalangle ACB = 40° + 20° = 60°$

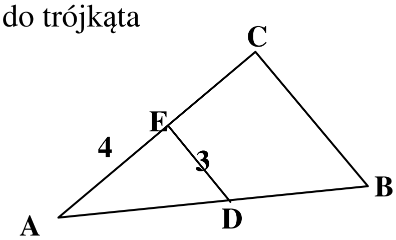
$\alpha = \sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle ACB = 2 \cdot 60° = 120°$

Kąt środkowy ma miarę 2 razy większą od kąta wpisanego



(C)

Zad 18. Jeżeli D jest środkiem AB to trójkąt ABC jest podobny do trójkąta ADE w skali 2 tak więc $|BC| = 2 \cdot |DE| = 2 \cdot 3 = 6$



(B)

Zad 19. Proste są prostopadłe gdy: $a_1 \cdot a_2 = -1$ czyli $\frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$ mamy więc proste ***k*** i ***m*** **(D)**

Zad 20. $P = (-1;\ 0)$ $\quad r = 3$. Równanie okręgu ma postać: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
wstawiając więc dane do równania otrzymujemy $(x+1)^2 + y^2 = 3^2$ czyli:
$(x+1)^2 + y^2 = 9$ **(A)**

Zad 21. $A = (13;\ -12)$ $\quad C = (15;\ 8)$ więc odcinek AC jest przekątną i przekątne przecinają się na środku. Środek odcinka AC $S = \left(\frac{13+15}{2};\ \frac{-12+8}{2}\right) = \left(\frac{28}{2};\ \frac{-4}{2}\right) = (14;\ -2)$ **(C)**

Zad 22. Przekrój osiowy – kwadrat o boku 4 czyli h = 4 oraz $2r = 4 |:2$ $\quad r = 2$

$P_{pc} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 2 \cdot 4 + 2\pi 2^2 = 16\pi + 8\pi = 24\pi$ **(D)**

Zad 23. $V_{ostr} = \frac{1}{3}V_{gran}$ Czyli objętość graniastosłupa jest 3 razy większa. $3 \cdot 81\sqrt{3} = 243\sqrt{3}$ **(D)**

Zad 24. Przy trzykrotnym rzucie monetą mamy 8 wyników $2^3 = 8$

Najłatwiej zadanie rozwiązać poprzez zaprzeczenie zdarzenia A

A' – ani razu nie wypadła reszka $A' = \{ooo\}$ $\quad \overline{\overline{A'}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \overline{\overline{A}} = 8 - 1 = 7$

$P(A) = \frac{7}{8}$ **(A)**

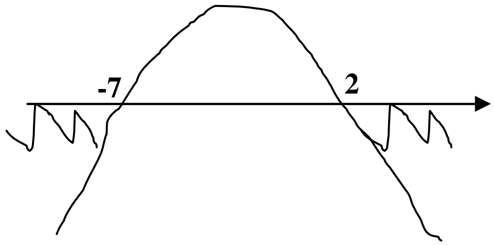
Zad 25. $\frac{x+13+7+5+5+3+2+11}{8} = 7 | \cdot 8$ $\qquad x + 46 = 56$ $\qquad x = 10$

Zbiór po uporządkowaniu $\{2;\ 3;\ 5;\ 5;\ 7;\ 10;\ 11;\ 13\}$

Mediana to średnia liczb środkowych $m = \frac{5+7}{2} = 6$ **(A)**

<u>***Zadania otwarte***</u>

Zad 26. $-x^2 - 5x + 14 < 0$



$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 14 = 25 + 56 = 81 \qquad \sqrt{81} = 9$

$x_1 = \frac{5-9}{2\cdot(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad x_2 = \frac{5+9}{2\cdot(-1)} = \frac{14}{-2} = -7$

Odp: $x \in (-\infty; \ -7) \cup (2; \ \infty)$

Zad 27. $x^3 - 6x^2 - 11x + 66 = 0$

$x^2(x-6) - 11(x-6) = 0$

$(x^2 - 11)(x-6) = 0$

$(x - \sqrt{11})(x + \sqrt{11})(x-6) = 0$

$x - \sqrt{11} = 0 \quad \vee \quad x + \sqrt{11} = 0 \quad \vee \quad x - 6 = 0$

Odpowiedź: $x_1 = \sqrt{11} \qquad x_2 = -\sqrt{11} \qquad x_3 = 6$

Zad 28. **Uwaga:*<u>(Zadanie to jest poza programem obowiązującym od 2015r. poziom podstawowy)</u>***

Kolejne liczby naturalne parzyste to: $n-2; \quad n; \quad n+2$

$(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3 = n^3 - 3n^2 \cdot 2 + 3n \cdot 2^2 - 2^3 + n^3 + n^3 + 3n^2 \cdot 2 + 3n \cdot 2^2 + 2^3 =$

$= 3n^3 - 6n^2 + 12n - 8 + 6n^2 + 12n + 8 = 3n^3 + 24n = 3n(n^2 + 8)$

n jest liczba parzystą więc się dzieli przez 2 a tym samym 3n dzieli się przez 6.

Stwierdzamy też, że $n^2 + 8$ dzieli się przez 4 bo kwadrat liczby parzystej dzieli się przez 4, a 8 też dzieli się przez 4 (suma liczb dzielących się przez 4 dzieli się przez 4)

Ostatecznie iloczyn liczb z których jedna dzieli się przez 6 a druga dzieli się przez 4 dzieli się przez $6 \cdot 4 = 24$

Zad 29. $\frac{4}{\sin^2\alpha} + \frac{4}{\cos^2\alpha} = 25$ Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika mamy:

$\frac{4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha} + \frac{4\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha} = 25$

$\frac{4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha} = 25$

$\frac{4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha} = 25 \qquad \frac{4 \cdot 1}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha} = 25 | \cdot (\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha)$

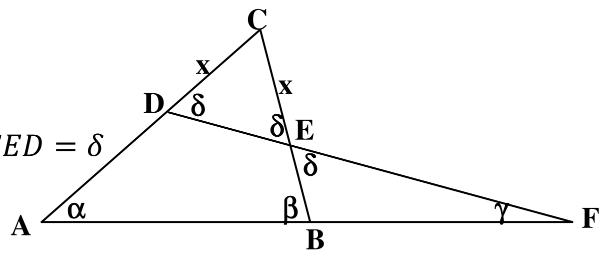
$4 = 25\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$ (***pierwiastkując całe równanie otrzymujemy***)

(wszystkie liczby są tu dodatnie gdyż jest założenie że kąty są ostre)

$5\sin\alpha\cos\alpha = 2 | : 5$.

$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{5} = 0{,}4$

Zad 30. Wykazać ze jeżeli |DC| = |EC| to:



$\alpha = \beta - 2 \cdot \gamma$

Trójkąt DEC równoramienny więc $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CED = \delta$

$\sphericalangle BEF = \delta$ - wierzchołkowe

$\sphericalangle EBF = 180° - (\delta + \gamma)$ z trójkąta BFE

$\sphericalangle EBF = 180° - \beta$ z kątów przyległych

$180° - (\delta + \gamma) = 180° - \beta$

$\delta + \gamma = \beta \qquad \delta = \beta - \gamma$

$\sphericalangle BED = \sphericalangle ADE = 180° - \delta = 180° - (\beta - \gamma) = 180° - \beta + \gamma$

Z czworokąta ABED mamy: $\alpha + \beta + 180° - \beta + \gamma + 180° - \beta + \gamma = 360°$

$\alpha - \beta + 2\gamma = 360° - 180° - 180°$

$\alpha - \beta + 2\gamma = 0$

$\alpha = \beta - 2\gamma$ co było do wykazania.

Zad 31. $a_5 = 22 \quad a_{10} = 47$ ciąg arytmetyczny

$a_5 = a_1 + 4r = 22 \qquad 10 = a_1 + 9r = 47$ teraz należy rozwiązać układ równań:

$\begin{cases} a_1 + 4r = 22 \\ a_1 + 9r = 47 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 22 - 4r \\ 22 - 4r + 9r = 47 \end{cases}$ przekształcając tylko II równanie mamy:

$5r = 47 - 22 \qquad 5r = 25 | : 5 \qquad r = 5$

$a_1 = 22 - 4 \cdot 5 = 22 - 20 = 2$

Odpowiedź: Pierwszy wyraz ciągu $a_1 = 2$, a różnica ciągu $r = 5$.

Zad 32. $s = 450km$ droga z A do B

t – czas Lidii $t_2 = t + 75min = t + 1\frac{15}{60}h = t + 1\frac{1}{4}h$ – czas Danuty

v – prędkość Lidii $v_2 = v - 18\frac{km}{h}$ – prędkość Danuty

Korzystając ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnym $s = v \cdot t$ mamy:

$\begin{cases} v \cdot t = 450 \\ (v-18)(t+1{,}25) = 450 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{450}{v}$ wstawiając to do II równania mamy:

$(v-18)\left(\frac{450}{v} + 1{,}25\right) = 450$

$v \cdot \frac{450}{v} + 1{,}25v - \frac{18 \cdot 450}{v} - 18 \cdot 1{,}25 = 450$

$450 + 1{,}25v - \frac{8100}{v} - 22{,}5 = 450$

$1{,}25v - \frac{8100}{v} - 22{,}5 = 0 | \cdot v$

$1{,}25v^2 - 8100 - 22{,}5v = 0 | \cdot 4$

$5v^2 - 90v - 32400 = 0 | : 5$

$v^2 - 18v - 6480 = 0$

$\Delta = (-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6480) = 324 + 25920 = 26244 \qquad \sqrt{26244} = 162$

$v_1 = \frac{18-162}{2} = \frac{-144}{2} = -72 \qquad v_2 = \frac{18+162}{2} = \frac{180}{2} = 90$

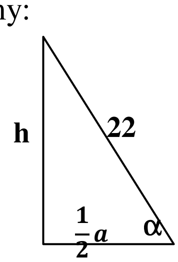
$v_1 = -72$ - niezgodne z warunkami zadania

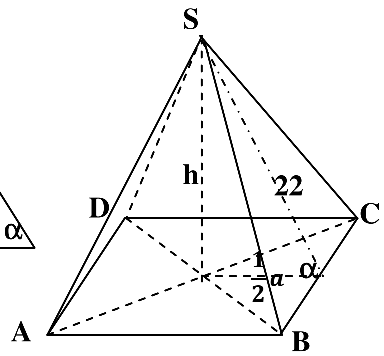
Dla $v = 90\frac{km}{h}$

mamy prędkość Danuty $v_2 = v - 18\frac{km}{h} = 90\frac{km}{h} - 18\frac{km}{h} = 72\frac{km}{h}$

Odpowiedź: Danuta pokonała trasę z prędkością $72\frac{km}{h}$ a Lidia z prędkością $90\frac{km}{h}$

Zad 33. Korzystając z przekroju ostrosłupa jak na rysunku mamy:





$\tan\alpha = \frac{4\sqrt{6}}{5} = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$

$\frac{4\sqrt{6}}{5} = \frac{h}{\frac{1}{2}a} \qquad \Rightarrow \qquad 2a\sqrt{6} = 5h | : 5$

$h = \frac{2a\sqrt{6}}{5}$ Teraz stosując twierdzenie Pitagorasa mamy:

$h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 22^2$

$\left(\frac{2a\sqrt{6}}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 484$

$\frac{4 \cdot 6a^2}{25} + \frac{1}{4}a^2 = 484 \qquad \frac{24}{25}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = 484$

$\frac{96}{100}a^2 + \frac{25}{100}a^2 = 484 \qquad \frac{121}{100}a^2 = 484 | \cdot \frac{100}{121} \qquad a^2 = 400$

$a = \sqrt{400} = 20 \qquad h = \frac{2a\sqrt{6}}{5} = \frac{2 \cdot 20\sqrt{6}}{5} = \frac{40}{5}\sqrt{6} = 8\sqrt{6}$

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot 8\sqrt{6} = \frac{400 \cdot 8\sqrt{6}}{3} = \frac{3200}{3}\sqrt{6}$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa wynosi $\frac{3200}{3}\sqrt{6}$

Zad 34. Jest zbiór $Z = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$

Zbiór M czyli tradycyjnie Ω ma liczebność: $\bar{\bar{\Omega}} = 5 \cdot 4 = 20$ Jeżeli cyfry w liczbie nie mogą się powtarzać więc pierwszą cyfrę można wylosować na 5 sposobów ale drugą tylko na 4.

$A = \{23;\ 24;\ 25;\ 34;\ 35;\ 45\} \qquad \bar{\bar{A}} = 6$

$P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania liczby gdzie jedności są większe od dziesiątek wynosi $\frac{3}{10} = 0{,}3$