Czerwiec 2014 rok (poziom rozszerzony)(stara matura)
Zadania otwarte

Zad 1. $|x+6|-2|x-4|\le 2x-3$

Określamy znak poszczególnych wyrażeń pod wartością bezwzględną:

$|x+6|=\begin{cases}-x-6 & dla\ x\in(-\infty;\ -6)\\ x+6 & dla\ x\in\langle -6;\ +\infty\ )\end{cases}$

$|x-4|=\begin{cases}-x+4 & dla\ x\in(-\infty;\ 4)\\ x-4 & dla\ x\in\langle 4;\ +\infty\ )\end{cases}$

Rozwiązujemy nierówność dla poszczególnych przedziałów:

1) dla $x\in(-\infty;\ -6)$ mamy:

$-x-6-2(-x+4)\le 2x-3$

$-x-6+2x-8\le 2x-3$

$-x+2x-2x\le -3+6+8$

$-x\le 11|\cdot(-1)$

$x\ge -11\ \ \wedge\ \ x\in(-\infty;\ -6)\Rightarrow\langle -11;-6)$

2) dla $x\in\langle -6;\ 4)$ mamy:

$x+6-2(-x+4)\le 2x-3$

$x+6+2x-8\le 2x-3$

$3x-2x\le 8-6-3$

$x\le -1\ \ \wedge\ \ x\in\langle -6;\ 4)\ \ \Rightarrow x\langle -6;\ -1\rangle$

3) dla $x\in\langle 4;\ +\infty\ )$ mamy:

$x+6-2(x-4)\le 2x-3$

$x+6-2x+8\le 2x-3$

$x-2x-2x\le -6-8-3$

$-3x\le -17|:(-3)$

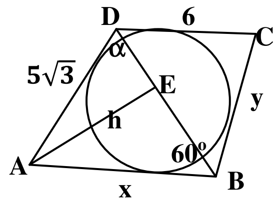
$x\ge 5\frac{2}{3}\ \ \wedge\ \ x\in\langle 4;\ +\infty\ )\ \Rightarrow\ \langle 5\frac{2}{3};\ +\infty\ )$

Odpowiedź:

$x\in\langle -11;-6)\cup\langle -6;\ -1\rangle\cup\langle 5\frac{2}{3};\ +\infty\ )\Rightarrow$

$x\in\langle -11;\ -1\rangle\cup\langle 5\frac{2}{3};\ +\infty\ )$

Zad 2. Oznaczmy AB = x; BC = y; AE = h – wysokość trójkąta ABD



$\sin\alpha=\frac{3}{4}$ czyli $\frac{h}{5\sqrt{3}}=\frac{3}{4}$ $\qquad 4h=3\cdot 5\sqrt{3}\qquad h=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

Z faktu że w czworokąt ABCD można wpisać okrąg mamy

$6+x=5\sqrt{3}+y\qquad x=5\sqrt{3}-6+y$

Z trójkąta ABE mamy $\sin 60°=\frac{h}{x}$ czyli $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\frac{15\sqrt{3}}{4}}{5\sqrt{3}-6+y}$

$\sqrt{3}\left(5\sqrt{3}-6+y\right)=2\cdot\frac{15\sqrt{3}}{4}\qquad 15-6\sqrt{3}+y\sqrt{3}=\frac{15\sqrt{3}}{2}$

$y\sqrt{3}=\frac{15\sqrt{3}}{2}-15+6\sqrt{3}\qquad y\sqrt{3}=\frac{27\sqrt{3}}{2}-15|:\sqrt{3}$

$y=\frac{27}{2}-\frac{15}{\sqrt{3}}=13{,}5-\frac{15\sqrt{3}}{3}=13{,}5-5\sqrt{5}$

$x=5\sqrt{3}-6+y=5\sqrt{3}-6+13{,}5-5\sqrt{5}=-6+13{,}5=7{,}5$

Pozostało policzyć długość przekątnej BD

Odcinek DE policzymy z faktu: $\cos\alpha=\frac{DE}{5\sqrt{3}}\qquad DE=\cos\alpha\cdot 5\sqrt{3}$ Mamy dany $\sin\alpha=\frac{3}{4}$ to z jedynki trygonometrycznej mamy: $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$DE=\cos\alpha\cdot 5\sqrt{3}=\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot 5\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{21}}{4}$

Odcinek BE obliczymy: $\cos 60°=\frac{BE}{7{,}5}\qquad BE=\cos 60°\cdot 7{,}5=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2}=\frac{15}{4}$

$BD=DE+BE=\frac{5\sqrt{21}}{4}+\frac{15}{4}=\frac{5\sqrt{21}+15}{4}$

Odpowiedź: W czworokącie ABCD bok AB ma długość 7,5 bok $BC=13{,}5-5\sqrt{5}$ a przekątna $BD=\frac{5\sqrt{21}+15}{4}$

Zad 3. $x(x-1)+y(y-1)\ge xy-1$ przekształcamy do postaci:

$x^2-x+y^2-y-xy+1\ge 0$ Teraz korzystamy z oczywistych nierówności

$(x-1)^2=x^2-2x+1\ge 0$ dla każdej liczby rzeczywistej jako kwadrat liczby

$(y-1)^2=y^2-2y+1\ge 0$

$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2\ge 0$

Teraz gdy dodamy te nierówności otrzymujemy

$x^2-2x+1+y^2-2y+1+x^2-2xy+y^2\ge 0$ czyli

$$2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y + 2 - 2xy \geq 0 |:2$$
$x^2 - x + y^2 - y + 1 - xy \geq 0$ czyli otrzymaliśmy nierówność która była do udowodnienie.

Zad 4. $-2\sin 3x \geq 1$ $\quad x \in \langle 0; \quad 2\pi\rangle$

$-2\sin 3x \geq 1 |:(-2)$

$\sin 3x \leq -\frac{1}{2}$ wiemy że $\sin 3x = -\frac{1}{2}$ dla $3x_1 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$ $\quad 3x_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$ czyli nierówność jest spełniona dla przedziałów $3x \in \langle\frac{7}{6}\pi + 2k\pi; \quad \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\rangle$ dzieląc wszystko przez 3 otrzymujemy

$x \in \langle\frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi; \quad \frac{11}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi\rangle$

teraz trzeba ustalić odpowiedź dla $x \in \langle 0; \quad 2\pi\rangle$

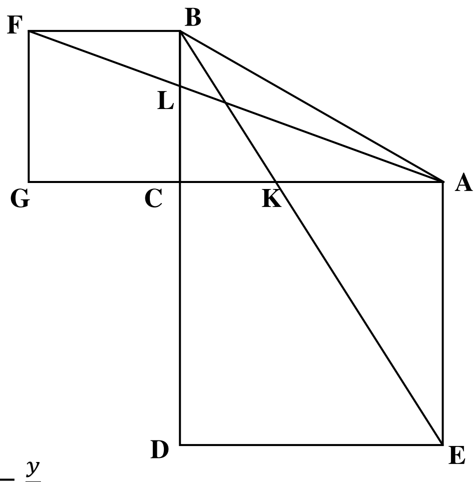
dla $k = 0$ $x \in \langle\frac{7}{18}\pi; \quad \frac{11}{18}\pi\rangle$; $\quad k = 1$ $x \in \langle\frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}\pi; \quad \frac{11}{18}\pi + \frac{2}{3}\pi\rangle = \langle\frac{19}{18}\pi; \quad \frac{23}{18}\pi\rangle$

$k = 2$ $x \in \langle\frac{7}{18}\pi + 2\cdot\frac{2}{3}\pi; \quad \frac{11}{18}\pi + 2\cdot\frac{2}{3}\pi\rangle = \langle\frac{7}{18}\pi + \frac{4}{3}\pi; \quad \frac{11}{18}\pi + \frac{4}{3}\pi\rangle = \langle\frac{7}{18}\pi + \frac{24}{18}\pi; \quad \frac{11}{18}\pi + \frac{24}{18}\pi\rangle =$

$= \langle\frac{31}{18}\pi; \quad \frac{35}{18}\pi\rangle$ uwaga: $\left[\frac{35}{18}\pi < 2\pi\right]$

Odpowiedź: rozwiązaniem nierówności są przedziały:

$x \in \langle\frac{7}{18}\pi; \quad \frac{11}{18}\pi\rangle \cup \langle\frac{19}{18}\pi; \quad \frac{23}{18}\pi\rangle \cup \langle\frac{31}{18}\pi; \quad \frac{35}{18}\pi\rangle$



Zad 5. Udowodnić że jeżeli trójkąt jest prostokątny i ACDE oraz BCGF kwadraty to $|KC| = |LC|$

Przyjmijmy: $AC = DE = a$; $\quad BC = FG = b$; $\quad CL = x$; $CK = y$.

I) Trójkąty ACL i AGF są podobne jako prostokątne mające wspólny kąt $\sphericalangle CAL = \sphericalangle GAF$.

Tak więc można zapisać proporcję $\frac{AC}{AG} = \frac{CL}{GF}$ czyli $\frac{a}{a+b} = \frac{x}{b}$

$x = \frac{a\cdot b}{a+b}$

II) Trójkąty BCK i BDE też są podobne bo też są prostokątne i mają wspólny kąt $\sphericalangle CBK = \sphericalangle DBE$

Tak samo zapisujemy proporcję odcinków $\frac{BC}{BD} = \frac{CK}{DE}$ czyli $\frac{b}{b+a} = \frac{y}{a}$

$y = \frac{a\cdot b}{a+b}$

Otrzymaliśmy tezę zadania $x = y = \frac{a\cdot b}{a+b}$

Zad 6. $x^2 + (2m-5)x + 2m + 3 = 0$

I) mają być 2 pierwiastki czyli $\Delta > 0$

$\Delta = (2m-5)^2 - 4\cdot 1\cdot(2m+3) = 4m^2 - 20m + 25 - 8m - 12 = 4m^2 - 28m + 13$

$4m^2 - 28m + 13 > 0$

$\Delta_m = (-28)^2 - 4\cdot 4\cdot 13 = 784 - 208 = 576$ $\quad \sqrt{576} = 24$

$m_1 = \frac{28-24}{2\cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\quad m_2 = \frac{28+24}{2\cdot 4} = \frac{52}{8} = \frac{13}{2} = 6{,}5$

$m \in (-\infty; \quad 0{,}5) \cup (6{,}5; \quad +\infty)$

II) pierwiastki spełniają warunki $(x_1 + x_2)^2 \geq x_1^2 \cdot x_2^2 \geq x_1^2 + x_2^2$

Z wzorów Viete'a mamy: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2m-5}{1} = 5 - 2m$ $\quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 2m + 3$

tak więc: $(x_1 + x_2)^2 = (5-2m)^2 = 25 - 20m + 4m^2$

$x_1^2 \cdot x_2^2 = (x_1 \cdot x_2)^2 = (2m+3)^2 = 4m^2 + 12m + 9$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 25 - 20m + 4m^2 - 2(2m+3) = 4m^2 - 20m + 25 - 4m - 6 =$
$= 4m^2 - 24m + 19$

Mamy więc do rozwiązania nierówności:

$4m^2 - 20m + 25 \geq 4m^2 + 12m + 9$ oraz $4m^2 + 12m + 9 \geq 4m^2 - 24m + 19$

a) $4m^2 - 20m + 25 \geq 4m^2 + 12m + 9$

$4m^2 - 4m^2 - 20m - 12m + 25 - 9 \geq 0$

$-32m + 16 \geq 0 \qquad -32m \geq -16 | : (-32) \qquad m \leq \frac{1}{2}$

$m \in (-\infty; \ \frac{1}{2}\rangle$

b) $4m^2 + 12m + 9 \geq 4m^2 - 24m + 19$

$4m^2 - 4m^2 + 12m + 24m + 9 - 19 \geq 0$

$36m - 10 \geq 0 \qquad 36m \geq 10 | : 36 \qquad m \geq \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

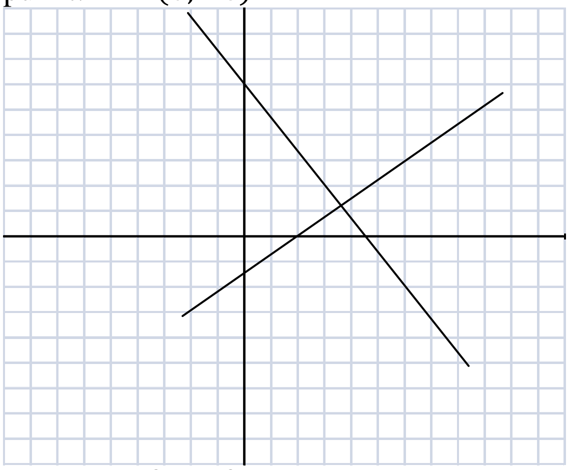
$m \in \langle\frac{5}{18}; \ +\infty)$

Odpowiedzią będzie cześć wspólna przedziałów:

$[(-\infty; \ 0{,}5) \cup (6{,}5; \ +\infty)] \cap (-\infty; \ \frac{1}{2}\rangle \cap \langle\frac{5}{18}; \ +\infty) = \langle\frac{5}{18}; \ \frac{1}{2}\Big)$

Odpowiedź: Zadanie ma rozwiązanie dla $m \in \langle\frac{5}{18}; \ \frac{1}{2}\Big)$

Zad 7. $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$ na tej prostej leży odcinek o długości 4 a symetralna tego odcinka przechodzi przez punkt: $P = (0; \ 6)$



prosta $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$ ma współczynnik kierunkowy $a = \frac{3}{4}$ więc do niej prostopadła ma współczynnik: $a = -\frac{4}{3}$ mamy: $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -1$

Symetralna szukanego odcinka ma więc postać $y = -\frac{4}{3}x + b$ i przechodzi przez punkt $P = (0; \ 6)$

mamy więc $6 = -\frac{4}{3} \cdot 0 + b \qquad b = 6$

Czyli postać kierunkowa prostej będącej symetralną odcinka AB to $y = -\frac{4}{3}x + 6$

Teraz rozwiążemy układ równań aby obliczyć współrzędne punktu przecięcia tych prostych czyli środek odcinka AB

$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} \\ y = -\frac{4}{3}x + 6 \end{cases}$ porównując równania mamy $\frac{3}{4}x - \frac{3}{2} = -\frac{4}{3}x + 6$

$\frac{3}{4}x + \frac{4}{3}x = 6 + 1{,}5 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{9}{12}x + \frac{16}{12}x = 7{,}5 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{25}{12}x = \frac{15}{2} | \cdot \frac{12}{25}$

$x = \frac{180}{50} = 3\frac{3}{5}$ po wstawieniu do I równania mamy: $y = \frac{3}{4} \cdot \frac{18}{5} - \frac{3}{2} = \frac{54}{20} - \frac{30}{20} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$

$S = \left(3\frac{3}{5}; \ 1\frac{1}{5}\right)$ współrzędna środka odcinka AB.

Odcinek AB leży na prostej $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$ więc punkty A i B mają współrzędne $\left(x; \ \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right)$

Punkty te leżą też na okręgu o środku w punkcie $S = \left(3\frac{3}{5}; \ 1\frac{1}{5}\right)$ i promieniu $r = 2$

Punkty te więc spełniają równanie $\left(3\frac{3}{5} - x\right)^2 + \left(1\frac{1}{5} - \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right)\right)^2 = 2^2$

$\left(\frac{18}{5} - x\right)^2 + \left(\frac{6}{5} - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}\right)^2 = 4 \qquad \left(\frac{18}{5} - x\right)^2 + \left(\frac{12}{10} - \frac{3}{4}x + \frac{15}{10}\right)^2 = 4$

$\left(\frac{18}{5}-x\right)^2+\left(\frac{27}{10}-\frac{3}{4}x\right)^2=4$

$\left(\frac{18}{5}\right)^2-2\cdot\frac{18}{5}x+x^2+\left(\frac{27}{10}\right)^2-2\cdot\frac{27}{10}\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3x}{4}\right)^2=4$

$\frac{324}{25}-\frac{36}{5}x+x^2+\frac{729}{100}-\frac{81}{20}x+\frac{9}{16}x^2=4$

$\frac{25}{16}x^2-\frac{81}{20}x-\frac{144}{20}x+\frac{729}{100}+\frac{1296}{100}-4=0$

$\frac{25}{16}x^2-\frac{225}{20}x+\frac{2025}{100}-\frac{400}{100}=0$

$\frac{25}{16}x^2-\frac{45}{4}x+\frac{1625}{100}=0$

$\frac{25}{16}x^2-\frac{45}{4}x+\frac{65}{4}=0|\cdot 16$

$25x^2-180x+260=0|:5$

$5x^2-36x+52=0$

$\Delta=(-36)^2-4\cdot5\cdot52=1296-1040=256$ $\qquad\sqrt{256}=16$

$x_1=\frac{36-16}{2\cdot5}=\frac{20}{10}=2$ $\qquad x_2=\frac{36+16}{2\cdot5}=\frac{52}{10}=\ 5\frac{1}{5}=\frac{26}{5}$

$y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$ $\qquad y_1=\frac{3}{4}\cdot2-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0$ $\qquad y_1=\frac{3}{4}\cdot\frac{26}{5}-\frac{3}{2}=\frac{78}{20}-\frac{30}{20}=\frac{48}{20}=2\frac{2}{5}$

Odpowiedź: szukane końce odcinka AB mają współrzędne: $A=(2;\ \ 0)$ $\quad B=\left(5\frac{1}{5};\ \ 2\frac{2}{5}\right)$

Zad 8. Dane są trzy liczby: $x;\ \ y;\ \ z$ i tworzą ciąg geometryczny czyli:

$x=a_1;\qquad y=a_1\cdot q;\qquad z=a_1\cdot q^2$

W kolejności $y;\ \ x;\ \ z$ jest to ciąg arytmetyczny czyli mamy:

$y=b_1;\qquad x=b_1+r;\qquad z=b_1+2r$ lub używając oznaczeń z ciągu geometrycznego mamy:

$a_1\cdot q;\qquad a_1;\qquad a_1\cdot q^2$ jest ciągiem arytmetycznym więc zachodzi związek:

I) $a_1-a_1\cdot q=a_1\cdot q^2-a_1$

Dane jest jeszcze że $b_1-7;\quad b_1+r;\quad b_1+2r+3$ jest ciągiem geometrycznym. Czyli

$a_1\cdot q-7;\quad a_1;\qquad a_1\cdot q^2+3$ - ciąg geometryczny czyli spełniający związek

II) $\frac{a_1}{a_1\cdot q-7}=\frac{a_1\cdot q^2+3}{a_1}$ wracając do oznaczenia $x=a_1$ i wykorzystując I oraz II mamy układ równań:

$\begin{cases}x-x\cdot q=x\cdot q^2-x\\ \frac{x}{xq-7}=\frac{xq^2+3}{x}\end{cases}$

$\begin{cases}x-xq=xq^2-x\\ x^2=(xq-7)(xq^2+3)\end{cases}$ $\qquad\begin{cases}x-xq+x-xq^2=\ 0\\ x^2=(xq-7)(xq^2+3)1\end{cases}$

$\begin{cases}2x-xq-xq^2=0\\ x^2=(xq-7)(xq^2+3)\end{cases}$ $\qquad\begin{cases}x(2-q-q^2)=0\\ x^2=(xq-7)(xq^2+3)\end{cases}$

Patrząc na równanie I: $x(2-q-q^2)=0$ oczywiście $x\neq0$ czyli mamy:

$2-q-q^2=0$ czyli $-q^2-q+2=0$

$\Delta=(-1)^2-4\cdot(-1)\cdot2=1+8=9$ $\qquad\sqrt{9}=3$

$q_1=\frac{1-3}{2\cdot(-1)}=\frac{-2}{-2}=1$ niezgodne z założeniem zadania $q_2=\frac{1+3}{2\cdot(-1)}=\frac{4}{-2}=-2$

Mając obliczone $q=-2$ możemy z II równania obliczyć **x**.

$x^2=(xq-7)(xq^2+3)$ czyli $x^2=(-2x-7)(x(-2)^2+3)$

$x^2=-8x^2-6x-28x-21$

$x^2+8x^2+6x+28x+21=0$

$9x^2+34x+21=0$

$\Delta=34^2-4\cdot9\cdot21=1156-756=400$ $\qquad\sqrt{400}=20$

$x_1=\frac{-34-20}{2\cdot9}=\frac{-54}{18}=-3$ $\qquad x_2=\frac{-34+20}{2\cdot9}=\frac{-14}{18}=-\frac{7}{9}$

Mamy więc 2 rozwiązania: dla $x=-\frac{7}{9};\qquad y=-\frac{7}{9}\cdot(-2)=\frac{14}{9};\qquad z=-\frac{7}{9}\cdot(-2)^2=-\frac{7}{9}\cdot4=-\frac{28}{9}$

dla $x=-3;\qquad y=-3\cdot(-2)=6;\qquad z=-3\cdot(-2)^2=-3\cdot4=-12$

Odpowiedź: Mamy dwa rozwiązania: Liczbami spełniającymi zadanie są:

$\left\{-\frac{7}{9};\ \ \frac{14}{9};\ \ -\frac{28}{9}\right\}$ lub $\{-3;\ \ 6;\ \ -12\}$

Zad 9. $W(x) = 6x^3 + (m+4)x^2 - 2x - 1$ Reszta przy dzieleniu przez $x - m$ wynosi 8

Oznacza to że gdyby m podstawić za x to wartość wielomianu wyniesie 8

$W(m) = 6m^3 + (m+4)m^2 - 2m - 1 = 8$

$6m^3 + m^3 + 4m^2 - 2m - 1 - 8 = 0$

$7m^3 + 4m^2 - 2m - 9 = 0$

widać wyraźnie że pierwiastkiem równania jest $m = 1$

$7 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 9 = 0$

$7 + 4 - 2 - 9 = 0$

Teraz trzeba wykonać dzielenia wielomianów $(7m^3 + 4m^2 - 2m - 9):(m-1)$

Można to zrobić metodą Hornera:

	7	4	- 2	- 9
obliczenia		$1 \cdot 7 + 4 = 11$	$1 \cdot 11 - 2 = 9$	$1 \cdot 9 - 9 = 0$
pierwiastek 1	7	11	9	

Po wykonaniu dzielenia otrzymaliśmy wielomian $7m^2 + 11m + 9$

Szukamy dalszych pierwiastków

$7m^2 + 11m + 9 = 0$

$\Delta = 11^2 - 4 \cdot 7 \cdot 9 = 121 - 252 = -131 \qquad \Delta < 0$

Z uwagi że $\Delta < 0$ nie ma dalszych pierwiastków wielomianu $7m^3 + 4m^2 - 2m - 9$

Teraz dla $m = 1$ wielomian $W(x) = 6x^3 + (m+4)x^2 - 2x - 1$ przyjmuje postać:

$W(x) = 6x^3 + (1+4)x^2 - 2x - 1 = 6x^3 + 5x^2 - 2x - 1$

Szukamy pierwiastków tego wielomianu czyli rozwiązujemy równanie:

$6x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0$ widzimy że dla $x = -1$ równanie jest spełnione

$6 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1 = 0$

$-6 + 5 + 2 - 1 = 0$

Teraz trzeba wykonać dzielenia wielomianów $(6x^3 + 5x^2 - 2x - 1):(x+1)$

Wykonamy to metodą Hornera

	6	5	- 2	- 1
obliczenia		$-1 \cdot 6 + 5 = -1$	$-1 \cdot (-1) - 2 = -1$	$-1 \cdot (-1) - 1 = 0$
pierwiastek -	6	- 1	- 1	

Po wykonaniu dzielenia otrzymaliśmy wielomian $6x^2 - x - 1$

Szukamy dalszych pierwiastków

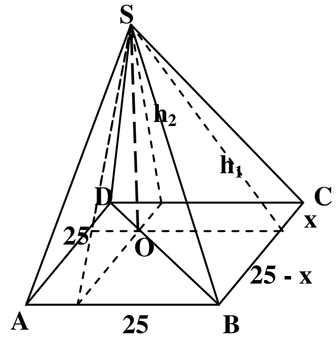
$6x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 1 + 24 = 25 \qquad \sqrt{25} = 5$

$x_2 = \frac{1-5}{2\cdot 6} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3} \qquad x_3 = \frac{1+5}{2\cdot 6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Odpowiedź: Pierwiastkami wielomianu $W(x) = 6x^3 + (m+4)x^2 - 2x - 1$ dla $m = 1$ są liczby $\left\{-1;\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right\}$

Zad 10. $P_{ABS} = P_{BCS} = 250; \qquad P_{CDS} = P_{ADS} = 187{,}5; \qquad AS = CS$



Obliczymy wysokości ścian.

$P_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot h \qquad P_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot h_1 \qquad P_{CDS} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot h_2$

$250 = 12{,}5 \cdot h_1 |: 12{,}5 \qquad h_1 = 20$

Wysokości trójkątów ABS i BCS wynoszą $h_1 = 20$

$187{,}5 = 12{,}5 \cdot h_2 |: 12{,}5 \qquad h_2 = 15$

Wysokości trójkątów CDS i ADS wynoszą $h_2 = 15$

Dodatkowo korzystając z faktu że $AS = CS$ można wykonać konstrukcję i określić gdzie znajduje się spodek wysokości ostrosłupa O.

Punkt O leży na przekątnej BD, dodatkowo widzimy że wysokość ostrosłupa SO w wysokościami ścian bocznych h_1 i h_2 tworzy dwa różne trójkąty prostokątne (wysokość H = SO prostopadłą do podstawy) natomiast długość krawędzi podstawy została podzielona na dwa odcinki x oraz $25 - x$. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać dwa równania

$\begin{cases} H^2 + x^2 = h_2^2 \\ H^2 + (25-x)^2 = h_1^2 \end{cases}$ czyli: $\begin{cases} H^2 + x^2 = 15^2 \\ H^2 + (25-x)^2 = 20^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} H^2 + x^2 = 225 \\ H^2 + 625 - 50x + x^2 = 400 \end{cases}$$ z I równania mamy: $H^2 = 225 - x^2$

po wstawieniu do II równania otrzymujemy:

$225 - x^2 + 625 - 50x + x^2 = 400$

$-50x = 400 - 625 - 225 \quad \Longrightarrow \quad -50x = -450 | : (-50) \quad \Longrightarrow \quad x = 9$

$H^2 + 9^2 = 225 \quad \Longrightarrow \quad H^2 = 225 - 81 \quad \Longrightarrow \quad H^2 = 144 \quad \Longrightarrow \quad H = \sqrt{144} = 12$

Pozostało nam obliczyć objętość ostrosłupa.

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 25^2 \cdot 12 = 625 \cdot 4 = 2500$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa wynosi 2500.

Zad 11. Wszystkich kul w urnie jest $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ a losujemy 3 więc ilość możliwości losowań to kombinacja $\overline{\overline{\Omega}} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{720}{6} = 120$

Mamy wylosować 3 kule ale każda inna. Z 4 kolorów kul wybieramy 3 kolory mamy takie 4 możliwości:

I) $\{biała;\ czarna;\ zielona\} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

II) $\{biała;\ czarna;\ niebieska\} = 4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$

III) $\{biała;\ zielona; niebieska\} = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$

IV) $\{czarna;\ zielona; niebieska\} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$\overline{\overline{A}} = 24 + 12 + 8 + 6 = 50 \qquad P(A) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo tego że losując 3 kule każda będzie innego koloru wynosi $\frac{5}{12}$.