Matura II termin czerwiec 2014r

Zadania zamknięte

Zad 1. A $\sqrt{x^2} = x$ – prawdziwe tylko dla nieujemnych
B $|-x| = x$ – prawdziwe tylko dla ujemnych
C $|x-1| = x-1$ – prawdziwe tylko dla $x \geq 1$
D $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$ – prawdziwe dla $x \in R$ zgodnie ze wzorem $\sqrt{x^2} = |x|$ **(D)**

Zad 2. $12+8+3+2=25$ $\frac{12}{25} = 0{,}48 = 48\%$ **(C)**

Zad 3. $(a-1)(b+1) = ab + a - b - 1$ **(C)**

Zad 4. $K = (1;\ \ 0)$ $L = (0;\ \ 1)$ Punkt L jest punktem przecięcia z osią OY więc b = 1
$a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1-0}{0-1} = -1$ **(A)**

Zad 5. $a = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$ $b = \log_3 3 = 1$ $c = \log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3$
$-3 < -2 < 1$ $c < a < b$ **(D)**

Zad 6. $f(x) = 3x - 4$ $x \in \langle -2;\ \ 2\rangle$
$f(-2) = 3\cdot(-2) - 4 = -6 - 4 = -10$ $f(2) = 3\cdot 2 - 4 = 6 - 4 = 2$
Jeżeli x należał do przedziału domkniętego to i $f(x) \in \langle -10;\ \ 2\rangle$ **(A)**

Zad 7. $f(x) = 3x^2 + 7x + c$ miejsce zerowe $x = \frac{-7}{3}$ czyli wykres przechodzi przez punkt $\left(-\frac{7}{3};\ \ 0\right)$
$f\left(-\frac{7}{3}\right) = 3\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)^2 + 7\cdot\left(-\frac{7}{3}\right) + c = 0$
$3\cdot\frac{49}{9} - \frac{49}{3} + c = 0$ $\frac{49}{3} - \frac{49}{3} + c = 0$ $0 + c = 0$ $c = 0$ **(A)**

Zad 8. $\frac{3^{27}+3^{26}}{3^{26}+3^{25}} = \frac{3^{25}(3^2+3^1)}{3^{25}(3^1+3^0)} = \frac{9+3}{3+1} = \frac{12}{4} = 3$ **(B)**

Zad 9. $W(x) = 2x^2 - 1$ $P(x) = x^3 + x.$ $Q(x) = (1-x)(x+1) = 1 - x^2 = -x^2 + 1.$
$W(x)\cdot P(x)\cdot Q(x) = (2x^2-1)(x^3+x)(-x^2+1) = -2x^7 \cdots.$ **(C)**

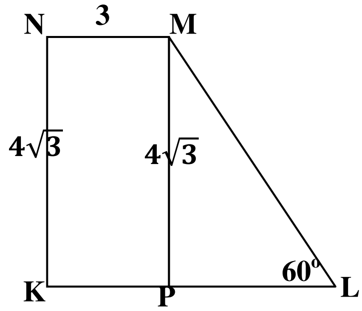
Zad 10. $f(x) = (x+2)(x-4) = x^2 - 4x + 2x - 8 = x^2 - 2x - 8$
$p = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2\cdot 1} = 1$ **(C)**

Zad 11. $a_1 = 5$ $q = -2$
$S_{10} = a_1\frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)} = 5\cdot\frac{1-1024}{3} = \frac{5\cdot(-1023)}{3} = \frac{-5115}{3} = -1705$ **(A)**

Zad 12. $a_2 = 11$ $a_4 = 7$ $a_4 - a_2 = a_1 + 3r - a_1 - r = 2r$
$2r = 7 - 11 = -4$ $\Longrightarrow$ $r = -2$ $a_2 = a_1 + r$
$11 = a_1 - 2$ $a_1 = 11 + 2 = 13$
$S_4 = \frac{13+7}{2}\cdot 4 = \frac{20}{2}\cdot 4 = 10\cdot 4 = 40$ **(B)**

Zad 13. Korzystając z jedynki trygonometrycznej mamy: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$
i podobnie $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ Tak więc podane wyrażenie sprowadza się do
$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1 + 1 = 2$ **(C)**

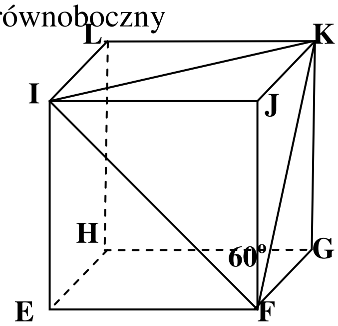
Zad 14. $\tan 60° = \frac{4\sqrt{3}}{PL}$ $\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{PL}$ $PL = 4$
$KL = 4 + 3 = 7$
$P_{KLMN} = \frac{7+3}{2}\cdot 4\sqrt{3} = 5\cdot 4\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$



(C)

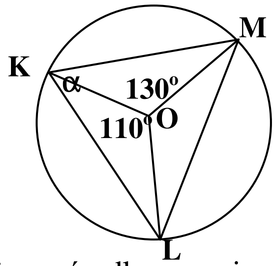
Zad 15. Łączna liczba punktów uzyskanych przez studentów I grupy to:
$40\cdot 30 = 1200$ punktów
Studenci II grupy uzyskali 1800 punktów co daje razem $1200 + 1800 = 3000$ punktów
Studentów było $40 + 20 = 60$
średnia dla wszystkich to: $\frac{3000}{60} = 50$ punktów. **(C)**

Zad 16. Rysując dodatkowo odcinek IK widzimy że, trójkąt FKI jest równoboczny
więc $\sphericalangle IFK = 60°$



(C)

Zad 17.
$\sphericalangle LKM$ jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy $\sphericalangle LOM$
$\sphericalangle LOM = 360° - (130° + 110°) = 360° - 240° = 120°$
$\sphericalangle LKM = \frac{1}{2} \cdot 120° = 60°$

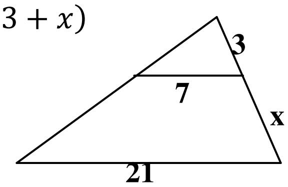


(B)

Zad 18. Jeżeli na trójkącie prostokątnym opisano okrąg to jego środek leży na środku przeciwprostokątnej, czyli promień to połowa przeciwprostokątnej.
$12^2 + 9^2 = c^2$ $c^2 = 144 + 81$ $c^2 = 225$
$c = \sqrt{225} = 15$ $r = \frac{15}{2}$ **(B)**

Zad 19. $\overline{\overline{\Omega}} = 30$ kwadraty liczb naturalnych to $\{1; \ 4; \ 9; \ 16; \ 25\}$ $\overline{\overline{A}} = 5$
$P(A) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ **(B)**

Zad 20. Z podobieństwa trójkątów mamy: $\frac{3}{7} = \frac{3+x}{21}$. $3 \cdot 21 = 7(3 + x)$
$63 = 21 + 7x$
$7x = 63 - 21$ $7x = 42|:7$ $x = 6$



(A)

Zad 21. Wymiary parku: $a = 2cm \cdot 20000 = 40000cm = 400m$
$b = 5cm \cdot 20000 = 100000cm = 1000m$
$P = 400m \cdot 1000m = 400000m^2$ **(D)**

Zad 22. $y = mx - 5$ $y = (1 - 2m)x + 7$ mają być równoległe więc:
$m = 1 - 2m$ $m + 2m = 1$ $m = \frac{1}{3}$ **(C)**

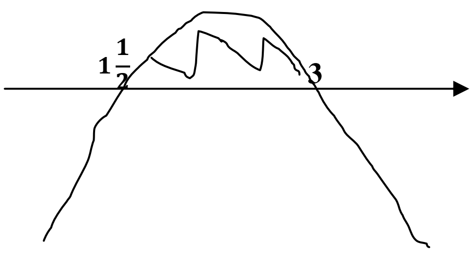
Zad 23. $M = (2; \ 0)$ $N = (0; \ -2)$ Czyli środek okręgu $O = (2; \ -2)$
Wiedząc że równanie okręgu ma postać $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ otrzymujemy:
$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ **(B)**

Zad 24. $r = 4$ $V = 96\pi$ $V = \pi r^2 \cdot h$ $96\pi = \pi \cdot 4^2 \cdot h$
$96\pi = 16\pi h|:16\pi$ $h = 6$
$P_b = 2\pi rh = 2\pi \cdot 4 \cdot 6 = 48\pi$ **(D)**

Zad 25. $V = 432$ $V = \frac{1}{3}a^2h$ $a = 12$
$432 = \frac{1}{3}12^2 \cdot h$ $432 = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot h$ $432 = 48h|:48$ $h = 9$ **(B)**

Zadania otwarte

Zad 26. $(2x - 3)(3 - x) \geq 0$
$6x - 2x^2 - 9 + 3x \geq 0$
$-2x^2 + 9x - 9 \geq 0$
$\Delta = 9^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-9) = 81 - 72 = 9$ $\sqrt{9} = 3$
$x_1 = \frac{-9-3}{2 \cdot (-2)} = \frac{-12}{-4} = 3$ $x_2 = \frac{-9+3}{2 \cdot (-2)} = \frac{-6}{-4} = 1{,}5$
Odp: $x \in \left\langle 1\frac{1}{2}; \quad 3 \right\rangle$



Zad 27. Udowodnić: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ $a, b \in R$

$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2} | \cdot 4 \quad \Longrightarrow \quad a^2+2ab+b^2 \le 2a^2+2b^2$

$a^2+2ab+b^2-2a^2-2b^2 \le 0$

$-a^2+2ab-b^2 \le 0 | \cdot (-1)$

$a^2-2ab+b^2 \ge 0$

$(a-b)^2 \ge 0$ To jest prawdziwe dla $a, b \in R$ jako kwadrat różnicy dowolnych liczb.

Zad 28. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ obliczyć: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} + \frac{\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} = \frac{\sin\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} = \frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha}$

teraz dla $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

Zad 29. $6; \quad 2x+4; \quad x+26$ ciąg arytmetyczny

w ciągu arytmetycznym mamy: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ czyli:

$2x+4-6 = x+26-(2x+4)$

$2x-2 = x+26-2x-4$

$2x-x+2x = 26-4+2$

$3x = 24 | : 3 \qquad x = 8$

$a_2 = 2x+4 = 2\cdot 8+4 = 20 \qquad r = a_2 - a_1 = 20-6 = 14$.

Zad 30. $K = \{-4;\ -1;\ 1;\ 5;\ 6\}$ $\quad L = \{-3;\ -2;\ 2;\ 3;\ 4\}$:

Zbiory są pięcioelementowe więc wszystkich możliwych losowań jest:

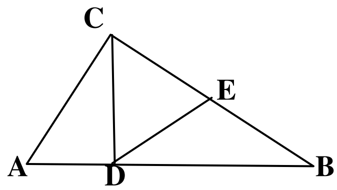
$\overline{\overline{\Omega}} = 5 \cdot 5 = 25$

Aby iloczyn był dodatni muszą być losowania typu: dodatnia **x** dodatnia lub ujemna **x** ujemna

dodatnia **x** dodatnia mamy $3 \cdot 3 = 9$

ujemna **x** ujemna mamy: $2 \cdot 2 = 4 \quad \overline{\overline{A}} = 9+4 = 13$

$P(A) = \frac{13}{25}$



Zad 31. |CD| = |DE| i |CE| = |EB| Jeżeli CD wysokość trójkąta to trójkąt CDB prostokątny i jeżeli ponadto E środek boku BC to E jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CDB

(wiadomym jest że środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym leży na środku przeciwprostokątnej)

Gdy E środek okręgu opisanego na trójkącie CDB to |DE| = |CE| = |EB| = r

Tak więc korzystając z faktu że |CD| = |DE| i |DE| = |CE| trójkąt CDE równoboczny.

Zad 32. Z założenia zadania trójkąt ASC jest równoramienny |AS| = |CS| więc:

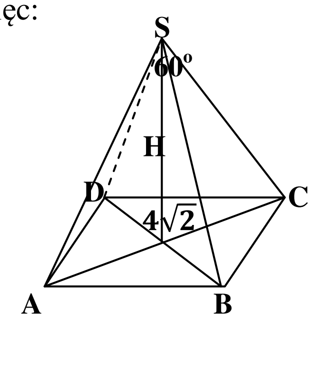
jeżeli $\sphericalangle ASC = 60°$ to trójkąt ASC jest równoboczny.

$H = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$

podstawą jest kwadrat o przekątnej $4\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

czyli bok kwadratu $a = 4$

$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H = \frac{1}{3}4^2 \cdot 2\sqrt{6} = \frac{16\cdot 2\sqrt{6}}{3} = \frac{32\sqrt{6}}{3}$



Zad 33. $s = 150km$

t - czas jazdy Nowaka

$t + 1\frac{5}{6}$ - czas jazdy Kowalskiego

v – prędkość Nowaka $\quad v = \frac{s}{t} = \frac{150}{t}$

$v - 11$ - prędkość Kowalskiego $\qquad v - 11 = \frac{150}{t+1\frac{5}{6}}$

$\begin{cases} v = \frac{150}{t} \\ v - 11 = \frac{150}{t+1\frac{5}{6}} \end{cases}$ wstawiając I równanie do II mamy

$\frac{150}{t} - 11 = \frac{150}{t+1\frac{5}{6}}$ $\frac{150}{t} - \frac{11t}{t} = \frac{150}{t+1\frac{5}{6}}$ $\frac{150-11t}{t} = \frac{150}{t+1\frac{5}{6}}$

$150t = (150 - 11t)\left(t + \frac{11}{6}\right)$

$150t = 150t + \frac{150\cdot 11}{6} - 11t^2 - \frac{121}{6}t$

$-11t^2 - \frac{121}{6}t + 275 = 0| \cdot 6$

$-66t^2 - 121t + 1650 = 0|: 11$

$-6t^2 - 11t + 150 = 0$

$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 150 = 121 + 3600 = 3721$ $\sqrt{3721} = 61$

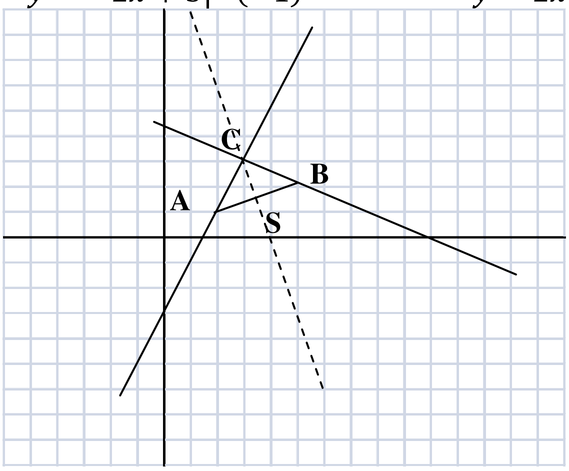
$t_1 = \frac{11-61}{2\cdot(-6)} = \frac{-50}{-12} = 4\frac{1}{6}$ $t_2 = \frac{11+61}{2\cdot(-6)} = \frac{72}{-12} = -6$ - niezgodne z warunkami zadania

$v = \frac{150}{t} = \frac{150}{4\frac{1}{6}} = 150: \frac{25}{6} = 150 \cdot \frac{6}{25} = 6 \cdot 6 = 36\frac{km}{h}$ - prędkość Nowaka

$v - 11 = 36\frac{km}{h} - 11\frac{km}{h} = 25\frac{km}{h}$ - prędkość Kowalskiego

Zad 34. $A = (2;\ 1)$ $B = (5;\ 2)$ |AB| = |AC| ramię zawiera się w prostej $2x - y - 3 = 0$ $C = (x;\ y)$

$-y = -2x + 3| \cdot (-1)$ $y = 2x - 3$



Prosta AB ma współczynnik kierunkowy $a_1 = \frac{2-1}{5-2} = \frac{1}{3}$ więc prosta do niej prostopadła na której leży wysokość tego trójkąta ma współczynnik kierunkowy $a_2 = -3$ i przechodzi przez środek odcinka AB $S = \left(\frac{2+5}{2};\ \frac{2+1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2};\ \frac{3}{2}\right)$

$y = -3x + b$ – Prosta CS $\frac{3}{2} = -3 \cdot \frac{7}{2} + b$ $b = \frac{3}{2} + \frac{21}{2} = \frac{24}{2} = 12$

$y = -3x + 12$ równanie prostej CS na której leży wysokość prostopadła do boku AB

Teraz rozwiązując układ równań $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -3x + 12 \end{cases}$ obliczymy współrzędne punktu C (wierzchołek trójkąta ABC)

$2x - 3 = -3x + 12$

$2x + 3x = 12 + 3$

$5x = 15|: 5$ $x = 3$

$y = 2x - 3 = 2 \cdot 3 - 3 = 6 - 3 = 3$ $C = (3;\ 3)$

Odpowiedź: Współrzędne punktu $C = (3;\ 3)$