Matura poprawka wrzesień 2020r

Zadania zamknięte

Zad 1. $\left(\sqrt{5}+2\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{5}^2 + 2\cdot\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3} + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 5 + 4\sqrt{15} + 4\cdot 3 = 17 + 4\sqrt{15}$ **(C)**

Zad 2. $\sqrt[4]{9\cdot\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3^2\cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{3^{2+\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{3^{2,5}} = (3^{2,5})^{\frac{1}{4}} = \left(3^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{5}{8}}$ **(A)**

Zad 3. $2\log 5 + 3\log 2 = \log 5^2 + \log 2^3 = \log(5^2\cdot 2^3)$ **(D)**

Zad 4. $\frac{5(4-x)}{2} < x|\cdot 2 \quad\Rightarrow\quad 5(4-x) < 2x$

$20 - 5x - 2x < 0 \quad\Rightarrow\quad -7x < -20|:(-7)$

$x > \frac{20}{7} \quad\Rightarrow\quad x > 2\frac{6}{7}$ czyli najmniejsza to $x = 3$ **(C)**

Zad 5. Mamy 128 czwórek i 122 dwójki to średnią policzymy

$Sr = \frac{128\cdot 4 + 122\cdot 2}{250} = \frac{512+244}{250} = \frac{756}{250} = 3{,}024 \qquad 3{,}024 - 3 = 0{,}024$ **(A)**

Zad 6. Cena początkowa komputera $3500zł$

Po I obniżce $90\%\cdot 3500 = 0{,}9\cdot 3500 = 3150$

Po II obniżce $85\%\cdot 3150 = 0{,}85\cdot 3150 = 2677{,}5$ **(C)**

Zad 7. $f(x) = -4x + 12 \qquad g(x) = -2x + k + 3$ wspólne miejsce zerowe

Miejsce zerowe funkcji ***f*** łatwo policzyć $-4x + 12 = 0$

$-4x = -12|:(-4) \quad\Rightarrow\quad x = 3$

tak więc $g(3) = -2\cdot 3 + k + 3 = 0 \quad\Rightarrow\quad -6 + k + 3 = 0$

$k = 6 - 3 = 3$ **(C)**

Zad 8. $f(x) = -(x+9)^2 + m \qquad Zw = (-\infty;\ -5\rangle$

Dla każdego kto zna istotę postaci kanonicznej funkcji kwadratowej jest oczywiste że m decyduje o przesunięciu wykresu względem osi OY czyli musi być $m = -5$ **(B)**

Zad 9. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x + 7$. Osią symetrii wykresu funkcji kwadratowej jest prosta o równaniu

$x = p$ tak więc $p = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2\cdot\frac{1}{3}} = \frac{-4}{\frac{2}{3}} = -4\cdot\frac{3}{2} = -\frac{12}{2} = -6.$ **(A)**

Zad 10. $f(x) = ax^2 + bx + c$

Z wykresu widać że: $a > 0$ – bo gałęzie wykresu skierowane do góry

$c > 0$ – bo wykres przecina oś OY powyżej początku układu. **(D)**

Zad 11. $\frac{x^2-3x}{x^2+x} = 0$ czyli $\frac{x(x-3)}{x(x+1)} = 0$ przyrównując mianownik do zera $x(x+1) = 0$ otrzymujemy że Dziedziną są liczby z wyjątkiem ***0*** i ***1***. Czyli $D = R\backslash\{0;\ 1\}$

Teraz rozwiązując równanie czyli przyrównując licznik do zera mamy $x(x-3) = 0$

$x_1 = 0\ \ lub\ \ x_2 = 3$ Ale $x_1 = 0 \notin D$ pozostaje $x_2 = 3$ **(C)**

Zad 12. $S = (2;\ 4); \qquad P = (1;\ 3)$ Obliczmy długość promienia czyli $|SP|$

$|SP| = \sqrt{(2-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Długość okręgu to $O = 2\pi r = 2\pi\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\pi$ **(C)**

Zad 13. ***l*** równoległa do $y = -\frac{1}{2}x + 2 \qquad P = (0;\ 7)$

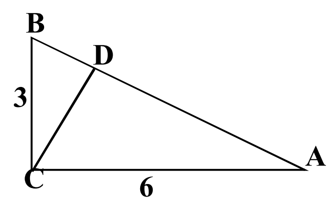
Odpowiedź jest natychmiastowa bo jeżeli równoległa to $a = -\frac{1}{2}$ a punkt przecięcia z osią OY mówi nam że $b = 7$ czyli mamy $y = -\frac{1}{2}x + 7$ **(D)**

Zad 14. $S = (4;\ 8) \quad P = (0;\ y) \qquad Q = (x;\ 0)$

Ze wzoru na środek odcinka mamy: $4 = \frac{0+x}{2} \quad\Rightarrow\quad x = 8; \qquad 8 = \frac{y+0}{2} \quad\Rightarrow\quad y = 16$

$P = (0;\ 16) \qquad Q = (8;\ 0)$ **(A)**

Zad 15. Korzystając z faktu że CD jest wysokością więc każdy trójkąt ABC; ADC i BCD to trójkąt prostokątny. Tak więc te trójkąty są podobne. Dane jest że: $\frac{P_{ADC}}{P_{BCD}} = \frac{4}{1} = 4 = k^2$



Tak więc trójkąty te są podobne w skali $k = \sqrt{4} = 2$

Odcinek BC jako przeciwprostokątna w trójkącie BCD odpowiada odcinkowi AC, przeciwprostokątnej w trójkącie ACD

$|BC| = \frac{|AC|}{2} = \frac{6}{2} = 3$

(D)

Zad 16. $P = (-3;\ \ 4);\qquad O = (0;\ \ 0)$

$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$ **(B)**

Zad 17. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ to z jedynki trygonometrycznej mamy:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ czyli $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{4\cdot 5}{25} + \cos^2\alpha = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{20}{25} + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{20}{25} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos^2\alpha = \frac{5}{25} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ **(B)**

Zad 18. $a_1 = 2;\qquad a_2 = 5$ ciąg arytmetyczny więc $r = 5 - 2 = 3$

$a_n = a_1 + (n-1)r = 2 + (n-1)3 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$ **(A)**

Zad 19. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ to dla $x = -3$ mamy

$f(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$ **(D)**

Zad 20. W proporcjonalności odwrotnej mamy zależność:

$y = \frac{a}{x}$ lub też $x \cdot y = a$ gdzie $\boldsymbol{a}$ wielkość stała w danej proporcjonalności

Mamy więc $\boldsymbol{a} = 3 \cdot 24 = 72$

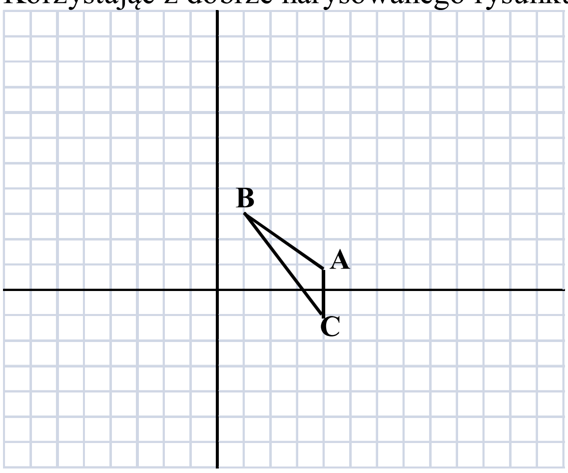
Teraz wyliczając a i b z zadania mamy $a \cdot 36 = 72 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 2$

$8 \cdot b = 72 \qquad \Longrightarrow \qquad b = 9$ **(D)**

Zad 21. Trzeba zauważyć że w odpowiedzi A $\left(y = -\frac{1}{2}\right)$ oraz w odpowiedzi D $(y = 2)$ współczynnik kierunkowy wynosi 0, a musi być spełniony warunek $a_1 \cdot a_2 = -1$ co mamy w punkcie B $\ -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$ **(B)**

Zad 22. $A = (4;\ \ 1);\ \ B = (1;\ \ 3);\ \ C = (4;\ \ -1)$

Korzystając z dobrze narysowanego rysunku widać że przyjmując odcinak $AC = 2$ jako podstawę



wysokość wynosi 3. Tak więc pole trójkąta wynosi: $P = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$ **(A)**

Zad 23. Pierwszą liczbą czterocyfrową podzielną przez 4 jest 1000 a ostatnią mniejszą od 2020 jest 2016 Teraz trzeba sobie uzmysłowić że każdej liczbie podzielnej przez 4 towarzyszy kolejne 3 liczby niepodzielne przez 4, dlatego przyjmijmy że liczbie 1000 towarzyszą 1001; 1002; 1003. Natomiast liczbie 2016 towarzyszą 2017; 2018 i 2019. Dlatego trzeba wykonać działanie:

$(2019 - 999) : 4 = 1020 : 4 = 255$ **(D)**

Zad 24. Liczba wierzchołków graniastosłupa to $2x$

Liczba wierzchołków ostrosłupa to $x + 1$ gdzie x to ilość wierzchołków w podstawie

Mamy więc $2x = x + 1 + 9 \qquad \Longrightarrow \qquad 2x = x + 10 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 10$ **(D)**

Zad 25. $6a^2 = 12 |: 6 \qquad \Longrightarrow \qquad a^2 = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \sqrt{2}$ – krawędź sześcianu.

Wszystkich krawędzi jest 12 więc mamy odpowiedź $12a = 12\sqrt{2}$ **(C)**

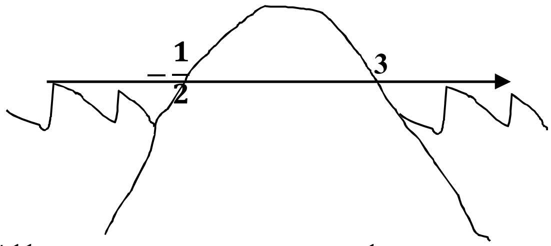
Zadania otwarte

Zad 26. $-2x^2+5x+3\le 0$

$\Delta=5^2-4\cdot(-2)\cdot 3=25+24=49 \qquad \sqrt{49}=7$

$x_1=\frac{-5-7}{2\cdot(-2)}=\frac{-12}{-4}=3 \qquad x_2=\frac{-5+7}{2\cdot(-2)}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$

Odp: $x\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right\rangle\cup\langle 3;\ \infty)$



Zad 27. $\{x+2;\quad 4x+2;\quad x+11\}$ – ciąg geometryczny

W ciągu geometrycznym mamy: $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$ tak więc $\frac{4x+2}{x+2}=\frac{x+11}{4x+2} \qquad x\neq -2;\quad x\neq -\frac{1}{2}$

$(4x+2)^2=(x+2)(x+11)$

$16x^2+16x+4=x^2+11x+2x+22$

$16x^2-x^2+16x-13x+4-22=0$

$15x^2+3x-18=0|:3$

$5x^2+x-6=0$

$\Delta=1^2-4\cdot 5\cdot(-6)=1+120=121 \qquad \sqrt{121}=11$

$x_1=\frac{-1-11}{2\cdot 5}=-\frac{12}{10}=-1{,}2 \qquad x_2=\frac{-1+11}{2\cdot 5}=\frac{10}{10}=1$

Odpowiedź: Dla $x=-1{,}2$ mamy: $x+2=-1{,}2+2=0{,}8;$

$4x+2=4\cdot(-1{,}2)+2=-4{,}8+2=-2{,}8;\quad x+11=-1{,}2+11=9{,}8$

Ciąg $\{0{,}8;\quad -2{,}8;\quad 9{,}8\}$ jest geometryczny z $q=\frac{-2{,}8}{0{,}8}=\frac{9{,}8}{-2{,}8}=-3{,}5$

Dla $x=1$ mamy: $x+2=1+2=3;\quad 4x+2=4\cdot 1+2=4+2=6;\quad x+11=1+11=12$

Ciąg $\{3;\quad 6;\quad 12\}$ jest geometryczny z $q=\frac{6}{3}=\frac{12}{6}=2$

Zad 28. Wykazać że: $a(a+b)+b^2>3ab \qquad a\neq b\in R$

Przekształcając wyrażenie mamy:

$a^2+ab+b^2>3ab$

$a^2+ab-3ab+b^2>0$

$a^2-2ab+b^2>0$

$(a-b)^2>0$ teraz korzystając z założenia że $a\neq b$ wynika $a-b\neq 0$ i podniesione do kwadratu jest większe od zera.

Co było do wykazania.

Zad 29. Oznaczmy: $|OS|=x;\quad |SP|=2+6=8$

$|SA|=r=2;\qquad |PB|=R=6$

Trójkąty ASO i BPO są prostokątne i podobne więc

$\frac{|OS|}{|SA|}=\frac{|OP|}{|PB|}$ czyli $\frac{x}{2}=\frac{x+8}{6}$

$6x=2(x+8)$

$6x=2x+16 \qquad \Longrightarrow \qquad 6x-2x=16$

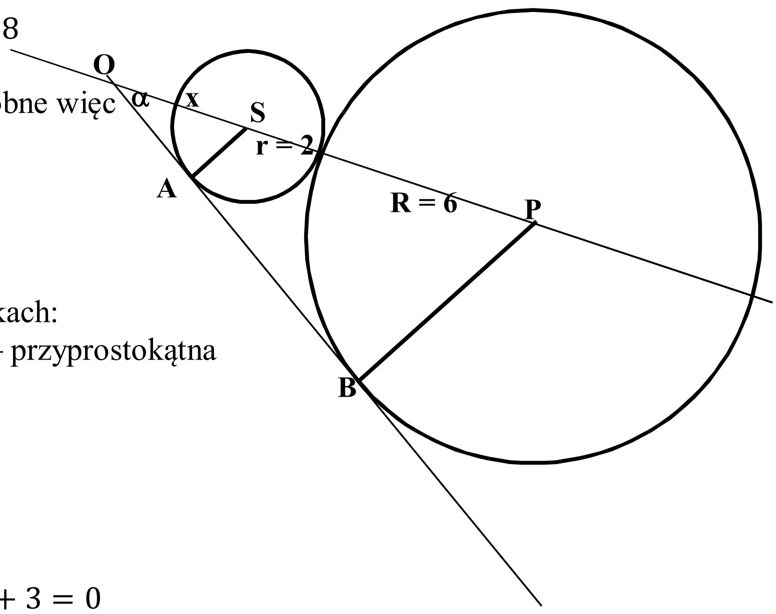
$4x=16|:4 \qquad x=4$

Mamy więc trójkąt prostokątny ASO o bokach:

$|OS|=4$ – przeciwprostokątna $|SA|=2$ – przyprostokątna

$\sin\alpha=\frac{|SA|}{|OS|}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha=30°$

Odp: wykazaliśmy że $\alpha=30°$



Zad 30. $(x^3+8)(x^2-9)=0$

$(x^3+8)(x-3)(x+3)=0$

$x^3+8=0 \quad \vee \quad x-3=0 \quad \vee \quad x+3=0$

$x^3=-8 \quad \vee \quad x=3 \quad \vee \quad x=-3$

$x_1=\sqrt[3]{-8}=-2 \qquad x_2=3 \qquad x_3=-3$

Zad 31. W pudełku mamy 5 kul białych i 3 czarne razem 8.

Po dołożeniu n kul białych mamy n + 5 białych i 3 czarne razem n + 8.

Doświadczenie polegające na wylosowaniu 1 kuli białej ma prawdopodobieństwo:

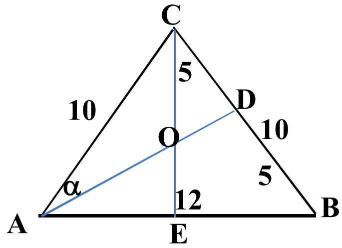
$\frac{n+5}{n+8} = \frac{11}{12} \qquad \Longrightarrow \qquad 11(n+8) = 12(n+5)$

$11n + 88 = 12n + 60$

$11n - 12n = 60 - 88 \qquad -n = -28 \qquad n = 28$

Odpowiedź: Do pudełka dołożono 28 kul białych.

Zad 32. Łatwo policzyć wysokość CE



$|AC| = 10; \quad |AE| = 6$

$CE^2 + 6^2 = 10^2 \qquad CE^2 = 100 - 36$

$CE^2 = 64 \qquad CE = \sqrt{64} = 8$

Wysokość CE jest jednocześnie środkową

Wiedząc że środkowe w trójkącie dzielą się

w stosunku $1:2$ mamy: $|OE| = \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{8}{3}$

Teraz korzystając z trójkąta prostokątnego AEO mamy

$\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 6^2 = AO^2 \qquad AO^2 = 36 + \frac{64}{9} = \frac{324+64}{9} = \frac{388}{9}$

$|AO| = \sqrt{\frac{388}{9}} = \frac{2\sqrt{97}}{3}$ Stąd $|AD| = \frac{3}{2} \cdot \frac{2\sqrt{97}}{3} = \sqrt{97}$

Pole trójkąta ABC łatwo policzyć $P = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$

Pole trójkąta ADC jest połową pola trójkąta ABC bo bok BC został podzielony na połowy.

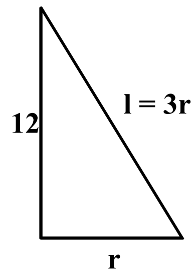
$P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 48 = 24$. Teraz korzystając ze wzoru $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha$ mamy

$24 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{97} \cdot \sin\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad 24 = 5 \cdot \sqrt{97} \cdot \sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{24}{5\sqrt{97}}$

Odp: Sinus kąta między bokiem AC i środkową AD wynosi $\sin\alpha = \frac{24}{5\sqrt{97}}$

Zad 33. Stożek $P_b = \pi r l; \qquad P_p = \pi r^2$ i jest dane że $P_b = 3P_p$



czyli $\pi r l = 3\pi r^2 | : \pi r \qquad l = 3r$

Rysując połowę przekroju otrzymujemy trójkąt jak na rysunku

Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

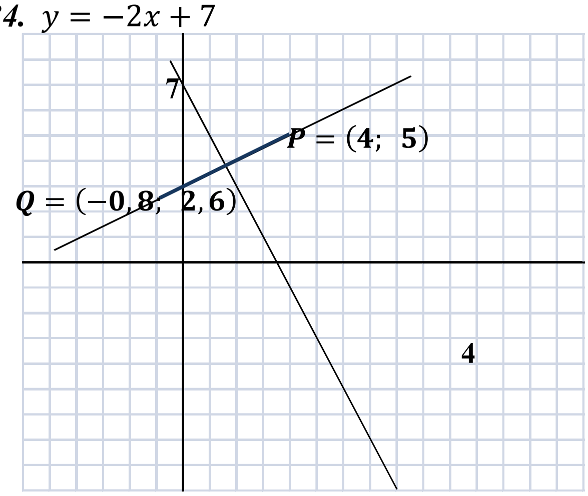
$r^2 + 12^2 = (3r)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad r^2 + 144 = 9r^2$

$8r^2 = 144 | : 8 \qquad \Longrightarrow \qquad r^2 = 18$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 18 \cdot 12 = \frac{1}{3} \cdot 216\pi = 72\pi$

Odpowiedź: Objętość stożka wynosi 72π

Zad 34. $y = -2x + 7$



B

8

Prosta $y = -2x + 7$ jest symetralną odcinka PQ czyli odcinek PQ leży na prostej prostopadłej do niej. Wyznaczmy równanie prostej PQ.

$a = \frac{1}{2}$ $\left(-2 \cdot \frac{1}{2} = -1\right)$ i przechodzi przez punkt $P = (4;\ \ 5)$

$y = \frac{1}{2}x + b \quad \Longrightarrow \quad 5 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b \quad \Longrightarrow \quad 5 = 2 + b \quad \Longrightarrow \quad b = 3$

Prosta PQ $y = \frac{1}{2}x + 3$

Teraz wyznaczymy współrzędne punktu przecięcia prostych rozwiązując układ równań.

$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$ czyli $-2x + 7 = \frac{1}{2}x + 3 \quad \Longrightarrow \quad -2x - \frac{1}{2}x = 3 - 7$

$-2\frac{1}{2}x = -4 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{5}{2}x = -4 | \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5} = 1{,}6$

$y = -2x + 7 = -2 \cdot \frac{8}{5} + 7 = -\frac{16}{5} + 7 = -3\frac{1}{5} + 7 = 3\frac{4}{5} = 3{,}8$

$S = (1{,}6;\ \ 3{,}8)$ punkt przecięcia prostych czyli środek odcinka PQ

Teraz korzystając ze wzoru na środek odcinka mamy: $P = (4;\ \ 5)$; $Q = (x;\ \ y)$

$1{,}6 = \frac{4+x}{2} | \cdot 2 \quad \Longrightarrow \quad 3{,}2 = 4 + x \quad \Longrightarrow \quad x = 3{,}2 - 4 \quad \Longrightarrow \quad x = -0{,}8$

$3{,}8 = \frac{5+y}{2} | \cdot 2 \quad \Longrightarrow \quad 7{,}6 = 5 + y \quad \Longrightarrow \quad y = 7{,}6 - 5 \quad \Longrightarrow \quad y = 2{,}6$

$Q = (-0{,}8;\ \ 2{,}6)$

Odpowiedź: Punkt Q symetryczny do punktu $P = (4;\ \ 5)$ względem prostej $y = -2x + 7$ ma współrzędne $(-0{,}8;\ \ 2{,}6)$.