Maj 2014r - poziom rozszerzony

Zadania otwarte

Zad 1. $f(x)=\frac{|x+3|+|x-3|}{x} \quad x\neq 0$

$|x+3|=\begin{cases} x+3 & dla\ x\geq -3 \\ -x-3 & dla\ x<-3 \end{cases}$

$|x-3|=\begin{cases} x-3 & dla\ x\geq 3 \\ -x+3 & dla\ x<3 \end{cases}$

$f(x)=\begin{cases} \frac{-x-3-x+3}{x} & dla\ x<-3 \\ \frac{x+3-x+3}{x} & dla\ x\in\langle -3;\ 3)\ x\neq 0 \\ \frac{x+3+x-3}{x} & dla\ x\geq 3 \end{cases}$ czyli:

$f(x)=\begin{cases} \frac{-2x}{x} & dla\ x<-3 \\ \frac{6}{x} & dla\ x\in\langle -3;\ 0)\cup(0;\ 3) \\ \frac{2x}{x} & dla\ x\geq 3 \end{cases}$ czyli

$f(x)=\begin{cases} -2 & dla\ x<-3 \\ \frac{6}{x} & dla\ x\in\langle -3;\ 0)\cup(0;\ 3) \\ 2 & dla\ x\geq 3 \end{cases}$

Tak więc mamy funkcję stałą $f(x)=-2$ dla $x\in(-\infty;\ -3)$ podobnie $f(x)=2$ dla $x\in\langle 3;\ +\infty)$ oraz hiperbolę $f(x)=\frac{6}{x}$ w przedziale $x\in\langle -3;\ 3)\ x\neq 0$

Odpowiedź: Zbiór wartości tej funkcji to $y\in(-\infty;\ -2\rangle\cup\langle 2;\ +\infty)$

Zad 2. $f(x)=x^2-(2m+2)x+2m+5$

1) dwa różne pierwiastki $\Delta>0$

$\Delta=(2m+2)^2-4\cdot 1\cdot(2m+5)=4m^2+8m+4-8m-20=4m^2-16$

$4m^2-16>0$

$4(m^2-4)>0$

$4(m+2)(m-2)>0$

$m\in(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$

$A=(x_1;\ 0) \quad B=(x_2;\ 0)\ \ x+y+1=0$

Odległość punktu $A=(x_1;\ 0)$ od prostej $x+y+1=0$ wyrazi się wzorem:

$d_1=\frac{|1\cdot x_1+1\cdot 0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|x_1+1|}{\sqrt{2}}$

tak samo odległość punktu $B=(x_2;\ 0)$ od prostej $x+y+1=0$ wyrazi się wzorem:

$d_2=\frac{|1\cdot x_2+1\cdot 0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|x_2+1|}{\sqrt{2}}$

2) teraz zapisujemy warunek z zadania:

$\left(\frac{|x_1+1|}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{|x_2+1|}{\sqrt{2}}\right)^2=6$ czyli

$\frac{(x_1+1)^2}{2}+\frac{(x_2+1)^2}{2}=6\ |\cdot 2$

$(x_1+1)^2+(x_2+1)^2=12$

$x_1^2+2x_1+1+x_2^2+2x_2+1=12$

$x_1^2+x_2^2+2x_1+2x_2=10$

$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2(x_1+x_2)=10$ Teraz korzystamy ze wzorów Viete'a

$x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{2m+2}{1}=2m+2 \quad x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{2m+5}{1}=2m+5$

$(2m+2)^2-2(2m+5)+2(2m+2)=10$

$4m^2+8m+4-4m-10+4m+4=10$

$4m^2+8m-12=0|:4$

$m^2+2m-3=0$

$\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16 \qquad \sqrt{16}=4$

$m_1=\frac{-2-4}{2}=\frac{-6}{2}=-3;\quad -3\notin(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty) \qquad m_2=\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1$

Odpowiedź: Istnieje jedno rozwiązanie $m=1$

Zad 3. $\sqrt{3}\cos x = 1 + \sin x \qquad x \in \langle 0; \quad 2\pi \rangle$

$\sqrt{3}\cos x = 1 + \sin x$

$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1 | : 2$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$ podstawiamy $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6} + x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \vee \qquad \frac{\pi}{6} + x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

dla $k = 0$ mamy $x_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \qquad x_2 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{3}{6}\pi = \frac{\pi}{2}$ dla $k = 1$ i następnych odpowiedzi wychodzą poza przedział $\langle 0; \quad 2\pi \rangle$

Zad 4. $(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2$ Przekształćmy tożsamościowo tą nierówność

$(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2 | \cdot xy$

$(x+1)x^2 + (y+1)y^2 > 2xy$

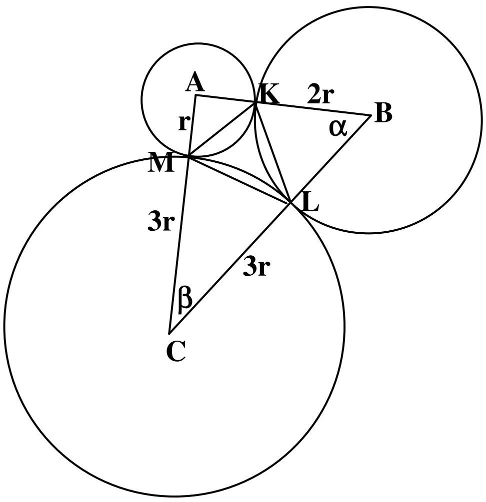
$x^3 + x^2 + y^3 + y^2 > 2xy$

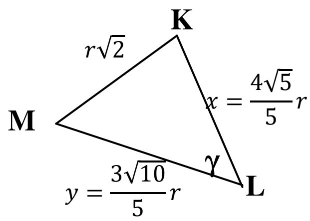
$x^3 + x^2 + y^3 + y^2 - 2xy > 0$

$x^2 - 2xy + y^2 + x^3 + y^3 > 0$

$(x-y)^2 + x^3 + y^3 > 0$ Tu już widać że nierówność jest prawdziwa dla każdej liczny dodatniej ***x*** i ***y.***
Kwadrat różnicy takich liczb jest nieujemny jak również trzecie potęgi tych liczb są dodatnie.

Zad 5.





Trójkąt ABC jest prostokątny bo ma boki długości: $r + 2r; \quad r + 3r; \quad 2r + 3r$ czyli $3r; \quad 4r; \quad 5r$

Z twierdzenia Pitagorasa mamy: $(3r)^2 + (4r)^2 = (5r)^2$ czyli $9r^2 + 16r^2 = 25r^2$

Pole trójkąta ABC łatwo obliczyć: $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3r \cdot 4r = \frac{12}{2}r^2 = 6r^2$

Tak więc w prostokątnym trójkącie ABC mamy: $\cos\alpha = \frac{3r}{5r} = \frac{3}{5} \qquad \cos\beta = \frac{4r}{5r} = \frac{4}{5}$

Trójkąt AMK jest prostokątny równoramienny więc $|MK| = r\sqrt{2}$ ze wzoru na przekątną kwadratu

Stosując twierdzenia cosinusów dla trójkątów BKL i CLM obliczymy długości odcinków KL i ML.

$|LK|^2 = x^2 = (2r)^2 + (2r)^2 - 2 \cdot 2r \cdot 2r \cdot \cos\alpha$

$x^2 = (2r)^2 + (2r)^2 - 2 \cdot 2r \cdot 2r \cdot \frac{3}{5}$

$x^2 = 4r^2 + 4r^2 - 8r^2 \cdot \frac{3}{5}$

$x^2 = 8r^2 - \frac{8 \cdot 3r^2}{5} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{40r^2 - 24r^2}{5} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{16r^2}{5} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{4r}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}r}{5}$

$|LM|^2 = y^2 = (3r)^2 + (3r)^2 - 2 \cdot 3r \cdot 3r \cdot \cos\beta$

$y^2 = (3r)^2 + (3r)^2 - 2 \cdot 3r \cdot 3r \cdot \frac{4}{5}$

$y^2 = 9r^2 + 9r^2 - 18r^2 \cdot \frac{4}{5}$

$y^2 = 18r^2 - \frac{18 \cdot 4r^2}{5} \quad \Longrightarrow \quad y^2 = \frac{90r^2 - 72r^2}{5} \quad \Longrightarrow \quad y^2 = \frac{18r^2}{5} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{3\sqrt{2}r}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2 \cdot 5}r}{5} = \frac{3\sqrt{10}}{5}r$

Teraz aby obliczyć pole trójkąta MKL policzymy $\cos \sphericalangle MLK = \cos\gamma$ z twierdzenia cosinusów

$\left(r\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{4\sqrt{5}r}{5}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{10}}{5}r\right)^2 - 2\cdot\frac{4\sqrt{5}}{5}r\cdot\frac{3\sqrt{10}}{5}r\cdot\cos\gamma$

$2r^2 = \frac{16\cdot 5}{25}r^2 + \frac{9\cdot 10}{25}r^2 - \frac{24\sqrt{50}}{25}r^2\cdot\cos\gamma$

$2r^2 = \frac{80}{25}r^2 + \frac{90}{25}r^2 - \frac{24\cdot 5\sqrt{2}}{25}r^2\cdot\cos\gamma$

$\frac{24\sqrt{2}}{5}r^2\cdot\cos\gamma = \frac{170}{25}r^2 - 2r^2$

$\frac{24\sqrt{2}}{5}r^2\cdot\cos\gamma = \frac{34}{5}r^2 - \frac{10}{5}r^2$

$\frac{24\sqrt{2}}{5}r^2\cdot\cos\gamma = \frac{24}{5}r^2 \quad\Longrightarrow\quad \cos\gamma = \frac{\frac{24}{5}r^2}{\frac{24\sqrt{2}}{5}r^2} \quad\Longrightarrow\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\Longrightarrow\; \gamma = 45^\circ$

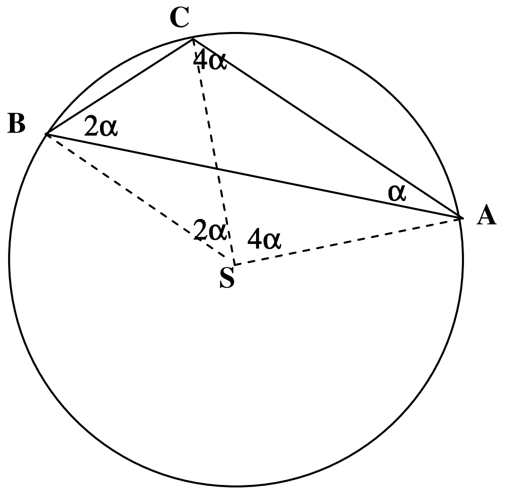
$\sin\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$P_{MLK} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot\sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{5}r\cdot\frac{3\sqrt{10}}{5}r\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{12\sqrt{100}}{100}r^2 = \frac{12\cdot 10}{100}r^2 = \frac{12}{10}r^2 = \frac{6}{5}r^2$

$k = \frac{\frac{6}{5}r^2}{6r^2} = \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{5}$

Odpowiedź Stosunek pola trójkąta MLK do pola trójkąta ABC to $k = \frac{1}{5}$

Zad 6.



$\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 180^\circ$

$7\alpha = 180^\circ \quad\Longrightarrow\quad \alpha = \frac{180^\circ}{7} = \left(25\frac{5}{7}\right)^\circ \qquad 2\alpha = \left(51\frac{3}{7}\right)^\circ \qquad 4\alpha = \left(102\frac{6}{7}\right)^\circ$

Trójkąt więc jest rozwartokątny.

Korzystając z faktu że kąt środkowy ma miarę dwa razy większą od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku otrzymujemy: $\sphericalangle BSC = 2\cdot\sphericalangle BAC = 2\alpha \quad \sphericalangle ASC = 2\cdot\sphericalangle ABC = 4\alpha$

$\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC + \sphericalangle ASC = 2\alpha + 4\alpha = 6\alpha$

Tak więc kąty w kolejności 6α; 4α; 2α tworzą ciąg arytmetyczny $r = -2$

Zad 7. Mamy ciąg geometryczny o wyrazach dodatnich $S_{100} = a_1\frac{1-q^{100}}{1-q}$ Jeżeli jest to ciąg geometryczny, to ciąg złożony z co drugiego wyrazu też jest geometryczny o ilorazie q^2

$S1_{50} = a_1\frac{1-(q^2)^{50}}{1-q^2}$ - suma wyrazów o numerach nieparzystych zaczynających się od a_1

$S2_{50} = a_2\frac{1-(q^2)^{50}}{1-q^2}$ - suma wyrazów o numerach parzystych zaczynających się od a_2

$a_1\frac{1-(q^2)^{50}}{1-q^2} = 100\cdot a_2\frac{1-(q^2)^{50}}{1-q^2} \quad\Longrightarrow\quad a_1 = 100a_2 \qquad$ ale $a_2 = a_1\cdot q$

$a_1 = 100a_1\cdot q \quad\Longrightarrow\quad 100q = 1 \quad\Longrightarrow\quad q = \frac{1}{100}$

$\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \cdots + \log a_{100} = 100$ z własności logarytmu mamy:

$\log(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\dots\cdot a_{100}) = 100$ Z definicji logarytmu mamy:

$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\dots\cdot a_{100} = 10^{100}$

$a_1\cdot a_1\cdot\frac{1}{100}\cdot a_1\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^2\cdot a_1\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^3\cdot\dots\cdot a_1\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{99} = 10^{100}$

${a_1}^{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{1+2+3+\cdots+99} = 10^{100}$ Przy mnożeniu potęg o tym samej podstawie wykładniki się dodaje.

Obliczmy jeszcze sumę $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 = \frac{1+99}{2} \cdot 99 = 100 \cdot \frac{99}{2} =$

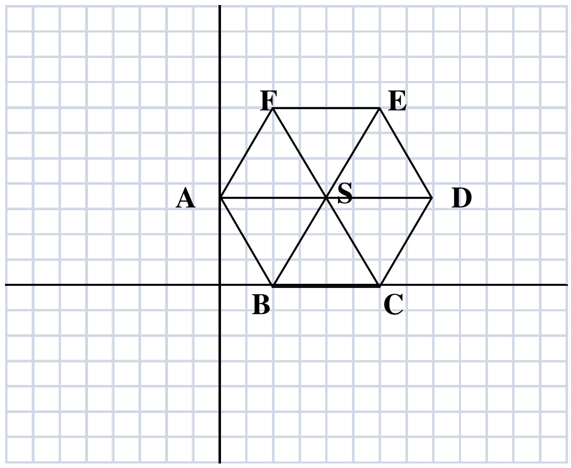
${a_1}^{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{100 \cdot \frac{99}{2}} = 10^{100}$

${a_1}^{100} = \frac{10^{100}}{\left(\frac{1}{100}\right)^{100 \cdot \frac{99}{2}}}$ Obliczamy $\sqrt[100]{a}$ i otrzymujemy

$a_1 = \frac{10}{\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{99}{2}}} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 10 \cdot 100^{\frac{99}{2}} = 10 \cdot (10^2)^{\frac{99}{2}} = 10 \cdot 10^{99} = 10^{100}$

Odpowiedź pierwszy wyraz tego ciągu wynosi 10^{100}

Zad 8.



$A = (0;\ 2\sqrt{3})$ $B = (2;\ 0)$

$|AB| = \sqrt{(2-0)^2 + (0 - 2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = \sqrt{16} = 4$

Mamy więc sześciokąt foremny o bokach długości 4.

Z warunków zadania wynika też jako oczywiste że $C = (2+4;\ \ 0) = (6;\ \ 0)$

Środek okręgu opisanego i środek symetrii sześciokąta musi leżeć na środku pomiędzy B i C co do współrzędnej x czyli $x = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$ a współrzędna y środka jest taka sama jak punktu A

$S = (4;\ \ 2\sqrt{3})$ Biorąc pod uwagę odcinek BE, punkt $S = (4;\ \ 2\sqrt{3})$ jest jego środkiem, więc współrzędne punktu $E = (x;\ y)$ obliczymy ze wzoru na środek odcinka

$4 = \frac{2+x}{2} \quad \Rightarrow \quad 8 = 2 + x \quad \Rightarrow \quad x = 8 - 2 \quad \Rightarrow \quad x = 6$

$2\sqrt{3} = \frac{0+y}{2} \quad \Rightarrow \quad 4\sqrt{3} = 0 + y \quad \Rightarrow \quad y = 4\sqrt{3}$

$E = (6;\ \ 4\sqrt{3})$

Teraz napiszemy równanie prostej BE

$a = \frac{4\sqrt{3}-0}{6-2} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ Prosta ma postać $y = \sqrt{3}x + b$ wstawiając punkt $B = (2;\ 0)$mamy:

$0 = \sqrt{3} \cdot 2 + b \quad \Rightarrow b = -2\sqrt{3}$ Prosta BE to: $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$

Styczna do okręgu w punkcie $E = (6;\ \ 4\sqrt{3})$ opisanego na sześciokącie jest prostopadła do prostej $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ czyli jej współczynnik kierunkowy $a = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

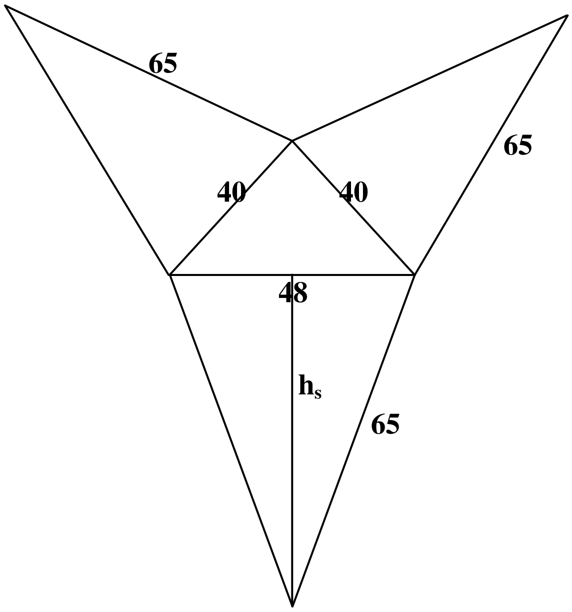
Równanie stycznej ma postać: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ $E = (6;\ \ 4\sqrt{3})$

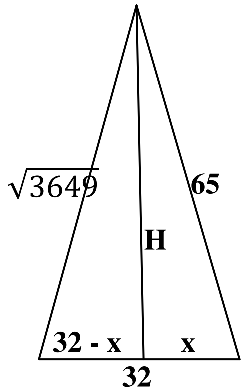
$4\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 6 + b \quad \Rightarrow \quad 4\sqrt{3} = -2\sqrt{3} + b \quad \Rightarrow \quad b = 6\sqrt{3}$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 6\sqrt{3}$

Odpowiedź: Równanie prostej stycznej do okręgu, opisanego na tym sześciokącie, przechodzącej przez wierzchołek $E = (6;\ \ 4\sqrt{3})$ to: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 6\sqrt{3}$

Zad 9.





${h_s}^2{+}24^2 = 65^2 \quad \Rightarrow \quad {h_s}^2 = 4225 - 576 \quad \Rightarrow \quad {h_s}^2 = 3649 \quad \Rightarrow \quad h_s = \sqrt{3649}$

${h_p}^2{+}24^2 = 40^2 \quad \Rightarrow \quad {h_p}^2 = 1600 - 576 \quad \Rightarrow \quad {h_p}^2 = 1024 \quad \Rightarrow \quad h_p = \sqrt{1024} = 32$

Wykonując przekrój ostrosłupa wzdłuż krawędzi pomiędzy przystającymi ścianami bocznymi i wzdłuż wysokości trzeciej ściany otrzymujemy trójkąt w którym mamy już długości wszystkich ścian a wysokość tego trójkąta jest wysokością ostrosłupa. W tym trójkącie możemy zapisać dwukrotnie Twierdzenie Pitagorasa:

$$\begin{cases} x^2 + H^2 = 65^2 \\ (32 - x)^2 + H^2 = \sqrt{3649}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + H^2 = 4225 \\ 32^2 - 64x + x^2 + H^2 = 3649 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H^2 = 4225 - x^2 \\ 1024 - 64x + x^2 + 4225 - x^2 = 3649 \end{cases}$$

II równanie $-64x = 3649 - 4225 - 1024$

$-64x = -1600 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1600}{-64} = 25$

$25^2 + H^2 = 65^2 \quad \Rightarrow \quad H^2 = 4225 - 625 \quad \Rightarrow \quad H^2 = 3600 \quad \Rightarrow \quad H = \sqrt{3600} = 60$

$P_p = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 32 = 24 \cdot 32 = 768$ - pole podstawy ostrosłupa

$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 768 \cdot 60 = 256 \cdot 60 = 15360$

Objętość tego ostrosłupa wynosi 15360.

Zad 10. $(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)[x^2 - (2m+1)x + m^2 + m] = 0$

$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$ łatwo zauważyć że pierwiastkiem jest $x_1 = -1$

$(-1)^3 + 2(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = -1 + 2 \cdot 1 - 2 + 1 = 3 - 3 = 0$

Należy teraz ustalić pierwiastki $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0$

$\Delta = [-(2m+1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 + m) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m = 1 \qquad \sqrt{1} = 1$

$x_2 = \frac{2m+1-1}{2} = \frac{2m}{2} = m \qquad x_3 = \frac{2m+1+1}{2} = \frac{2m+2}{2} = m + 1$

Teraz trzeba ustalić dla jakiego m pierwiastki $\{-1; \quad m; \quad m+1\}$ spełniają warunki, że jeden z nich jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych

1) $-1 = \frac{m+m+1}{2} \quad \Rightarrow \quad -1 = \frac{2m+1}{2} \quad \Rightarrow \quad -2 = 2m + 1 \quad \Rightarrow \quad 2m = 3 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{3}{2} = 1{,}5$

nie spełnia warunków zadania bo pierwiastki mają być całkowite.

2) $m = \frac{-1+m+1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{m}{2} \quad \Rightarrow \quad 2m = m \quad \Rightarrow \quad 2m - m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$

Pierwiastki to $\{-1; \quad 0; \quad 1\}$

3) $m + 1 = \frac{-1+m}{2} \quad \Rightarrow \quad 2(m+1) = m - 1 \quad \Rightarrow \quad 2m + 2 = m - 1 \quad \Rightarrow \quad m = -3$

Pierwiastki to $\{-3; \quad -2; \quad -1\}$

Zad 11. Wylosowanie trzech liczb z dziesięciu to kombinacja $\binom{10}{3}$

$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 4\cdot 3\cdot 10 = 120$

A – numer jednej z kul jest sumą numerów dwóch pozostałych, Wylosowane trzy kule $\{a;\ \ b;\ \ c\}$ kule są nierozróżnialne więc posługujemy się kombinacją nie wariacją

$a = 10 \Longrightarrow (b = 1;\ c = 9) \vee (b = 2;\ c = 8) \vee (b = 3;\ c = 7) \vee (b = 4;\ c = 6) -$ 4 sytuacje

$a = 9 \Longrightarrow (b = 1;\ c = 8) \vee (b = 2;\ c = 7) \vee (b = 3;\ c = 6) \vee (b = 4;\ c = 5) -$ 4 sytuacje

$a = 8 \Longrightarrow (b = 1;\ c = 7) \vee (b = 2;\ c = 6) \vee (b = 3;\ c = 5) -$ 3 sytuacje

$a = 7 \Longrightarrow (b = 1;\ c = 6) \vee (b = 2;\ c = 5) \vee (b = 3;\ c = 4) -$ 3 sytuacje

$a = 6 \Longrightarrow (b = 1;\ c = 5) \vee (b = 2;\ c = 4) -$ 2 sytuacje

$a = 5 \Longrightarrow (b = 1;\ c = 4) \vee (b = 2;\ c = 3) -$ 2 sytuacje

$a = 4 \Longrightarrow (b = 1;\ c = 3) -$ 1 sytuacja

$a = 3 \Longrightarrow (b = 1;\ c = 2) -$ 1 sytuacja

$\overline{\overline{A}} = 2\cdot(4 + 3 + 2 + 1) = 2\cdot 10 = 20 \quad P(A) = \frac{20}{120} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$