Kwiecień 2020 rok (poziom rozszerzony)
Zadania zamknięte

Zad 1. $L = \log_{\sqrt{2}} 2 \cdot \log_2 \sqrt{3} \cdot \log_{\sqrt{3}} 4 = 2 \cdot \frac{\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}}{\log_{\sqrt{3}} 2} \cdot \log_{\sqrt{3}} 2^2 = 2 \cdot \frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 2} \cdot 2 \cdot \log_{\sqrt{3}} 2 = 4 \cdot$ **(D)**

Zad 2. $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 625$ czyli $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 25^2$

Mamy więc okrąg o środku w punkcie $S_1 = (3;\ \ -7)$ i promieniu 25

$S_2 = (12;\ \ 5)$ środek drugiego okręgu

Obliczmy odległość między środkami

$\overrightarrow{S_1S_2} = [12-3;\ \ \ 5-(-7)] = [9;\ \ 12]$

$\left|\overrightarrow{S_1S_2}\right| = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$

Mamy więc okręgi styczne wewnętrznie i promień drugiego wynosi $25 - 15 = 10$ **(C)**

Zad 3. $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2} - 1 + 2 - \sqrt{2} = 1$

wystarczy skorzystać faktu: $\sqrt{a^2} = |a|$ **(A)**

Zad 4. $\left|\frac{4}{3}x + 5\right| < 2.$

$\frac{4}{3}x + 5 < 2 \quad \wedge \quad \frac{4}{3}x + 5 > -2$

$\frac{4}{3}x < 2 - 5 \quad \wedge \quad \frac{4}{3}x > -2 - 5$

$\frac{4}{3}x < -3 | \cdot \frac{3}{4} \quad \wedge \quad \frac{4}{3}x > -7 | \cdot \frac{3}{4}$

$x < -\frac{9}{4} \quad \wedge \quad x > -\frac{21}{4}$

liczby spełniające ten układ nierówności: $-3;\ \ -4;\ \ \ -5$ **(B)**

Zad 5. $f(x) = \frac{x^2}{x-1} \qquad A = \left(6;\ \ \frac{36}{5}\right)$

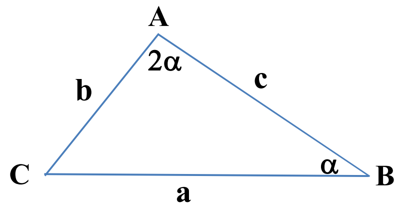
Aby podać współczynnik kierunkowy stycznej do krzywej w danym punkcie trzeba policzyć wartość pochodnej w tym punkcie

$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$f'(6) = \frac{6^2 - 2 \cdot 6}{(6-1)^2} = \frac{36-12}{5^2} = \frac{24}{25} = 0{,}96$

Odpowiedź: $\boxed{0}\boxed{9}\boxed{6}$

Zad 6. Mamy wykazać $|BC|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AC|$



Lub też korzystając z oznaczeń jak na rysunku

$a^2 - b^2 = c \cdot b$

Z twierdzenia sinusów mamy:

$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin 2\alpha}$ czyli $\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{a}{2\sin\alpha\cos\alpha} | \cdot \sin\alpha$

$b = \frac{a}{2\cos\alpha} \quad \Longrightarrow \quad a = 2b\cos\alpha \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{a}{2b}$

teraz z twierdzenia kosinusów mamy:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha$ i wstawiając tu $\cos\alpha = \frac{a}{2b}$ mamy

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\frac{a}{2b}$ czyli $b^2 = a^2 + c^2 - \frac{a^2c}{b} \ | \cdot b$

$b^3 = ba^2 + bc^2 - a^2c$ czyli $b^3 - bc^2 = ba^2 - a^2c$

1° zakładamy że $b \neq c$

$b^3 - bc^2 = a^2(b-c) | : (b-c)$

$\frac{b^3 - bc^2}{b-c} = a^2$ czyli $\frac{b(b^2-c^2)}{b-c} = a^2 \quad \Longrightarrow \quad a^2 = \frac{b(b-c)(b+c)}{b-c}$

$a^2 = b(b+c)$ czyli mamy tezę $a^2 - b^2 = c \cdot b$

2° gdy $b = c$ to mamy trójkąt równoramienny prostokątny:

$\sphericalangle CAB = 2\alpha = 90° \qquad \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \alpha = 45°$

Stosując twierdzenie Pitagorasa mamy: $b^2 + c^2 = a^2$ i oczywiście $b = c$

$a^2 - b^2 = c^2$ i korzystając że $b = c$ mamy tezę $a^2 - b^2 = c \cdot b$

Zad 7. $\sin\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}+\alpha\right)<\frac{1}{4}$ $\qquad \alpha\in\left(0;\quad \frac{\pi}{2}\right)$

Przekształcając lewą stronę nierówności mamy:

$\sin\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}+\alpha\right)=\left(\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{12}\sin\alpha\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{12}\sin\alpha\right)=$

$=\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos^2\alpha-\sin^2\frac{\pi}{12}\cdot\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\frac{\pi}{12}\cdot\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}=$

$=\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\cdot(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-\sin\alpha\cos\alpha\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}-\sin\alpha\cos\alpha=$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

teraz należy zauważyć że dla $\alpha\in\left(0;\quad \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad 2\alpha\in(0;\quad \pi)$ i funkcja $\sin 2\alpha$ dla $2\alpha\in(0;\quad\pi)$ ma wartość dodatnią. Tak więc otrzymujemy: $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin 2\alpha<\frac{1}{4}$ $\qquad$ co należało wykazać

Zad 8. Mamy wykazać że: $x^8+x^2=2(x^4+x-1)$ ma tylko jeden pierwiastek $x=1$

$x^8+x^2=2(x^4+x-1)$ czyli $x^8+x^2-2x^4-2x+2=0$ Mamy więc:

$x^8-2x^4+1+x^2-2x+1=0$ czyli mamy sumę kwadratów:

$(x^4-1)^2+(x-1)^2=0$ Jako suma kwadratów jest ona nieujemna. Tak więc jest spełniona tylko dla $x=1$ bo wtedy otrzymujemy $0+0=0$

Zad 9. Mamy zbiór $\{0;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$ i tworzymy zbiór liczb ośmiocyfrowych:

$\overline{\overline{\Omega}}=5\cdot 6^7$ – Na pierwszym miejscu może być 5 różnych cyfr (nie może być 0) a na 7 pozostałych dowolna z 6 podanych (wariacje z powtórzeniami)

A – suma cyfr wynosi 3

Elementy zbioru A mogą mieć następującą postać:

a) 3000000 – jedna możliwość.

b) 1 na początku a na pozostałych miejscach dwie jedynki i 5 zer. Takich możliwości jest $\binom{7}{2}=\binom{7}{5}=\frac{7!}{2!\cdot 5!}=\frac{6\cdot 7}{1\cdot 2}=\frac{42}{2}=21$

$\overline{\overline{A}}=1+21=22$ $\qquad P(A)=\frac{22}{5\cdot 6^7}=\frac{2\cdot 11}{5\cdot 6\cdot 6^6}=\frac{11}{5\cdot 3\cdot 6^6}=\frac{11}{15\cdot 46656}=\frac{11}{699840}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo że wybrana liczba ośmiocyfrowa ma sumę cyfr wynoszącą 3 wynosi $\frac{11}{699840}$.

Zad 10. $\{a;\quad aq;\quad aq^2\}$ – Ciąg geometryczny rosnący gdzie $a,\ q$ – liczby całkowite nieparzyste tak więc wyrazem największym jest aq^2

Ciąg $\{a;\quad aq;\quad aq^2-4\}$ jest arytmetyczny czyli mamy:

$aq-a=aq^2-4-aq$

$aq+aq-a-aq^2=-4|\cdot(-1)$

$aq^2-2aq+a=4$

$a(q^2-2q+1)=4|:(q^2-2q+1)$

$a=\frac{4}{(q^2-2q+1)}=\frac{4}{(q-1)^2}$

Teraz korzystając z faktu że $a,$ i q mając być całkowite i nieparzyste a ciąg rosnący to muszą być spełnione warunki:

a) $(q-1)^2$ jest liczbą dodatnią jako kwadrat i musi być dzielnikiem liczby 4

$(q-1)^2\in\{1;\ 2;\ 4\}$

b) $q>1$ – ciąg rosnący

Mamy więc dla $(q-1)^2=1;\quad q=2\ \ q$ ma być nieparzyste więc nie spełnia warunków zadania

$(q-1)^2=2\quad q=\sqrt{2}+1;\ q$ nie spełnia warunków zadania nie jest liczbą nieparzystą.

$(q-1)^2=4\quad q=3\quad q$ spełnia warunki zadania.

Warunki te spełnia tylko $q=3\ \ a=\frac{4}{(q-1)^2}=\frac{4}{4}=1$

$a\cdot q=1\cdot 3=3$

Odpowiedź: Wyraz aq tego ciągu wynosi 3.

Zad 11. Ciąg okręgów $x^2 + y^2 = 2^{11-n} \qquad r = \sqrt{2^{11-n}}$.

Policzmy wielkość pierwszego pierścienia czyli a_1 szukanego ciągu:

$O_1 = \pi r_1^2 = \pi 2^{11-1} = \pi 2^{10} \qquad\qquad O_2 = \pi r_2^2 = \pi 2^{11-2} = \pi 2^9$

$P_1 = \pi 2^{10} - \pi 2^9 = \pi 2^9 (2-1) = \pi 2^9 = 512\pi$

okrąg O_{2k-1} ma wzór: $x^2 + y^2 = 2^{11-2k+1} = 2^{12-2k} = r^2$

okrąg O_{2k} ma wzór: $x^2 + y^2 = 2^{11-2k} = r^2$

tak więc $P_k = \pi 2^{12-2k} - \pi 2^{11-2k} = \pi 2^{11-2k}(2-1) = \pi 2^{11-2k}$ – pole pierścienia *k*

$P_{k+1} = \pi 2^{12-2(k+1)} - \pi 2^{11-2(k+1)} = \pi 2^{12-2k-2} - \pi 2^{11-2k-2} = \pi 2^{10-2k} - \pi 2^{9-2k} =$
$= \pi 2^{9-2k}(2-1) = \pi 2^{9-2k}$ – pole pierścienia następnego *k+1*

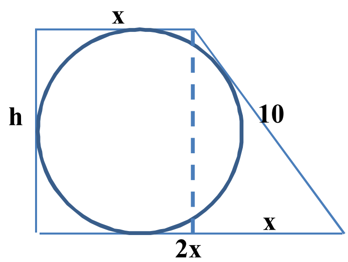
$q = \frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{\pi 2^{9-2k}}{\pi 2^{11-2k}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Mamy więc do czynienia z ciągiem zbieżnym gdzie $q = \frac{1}{4}$

$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{512\pi}{1-\frac{1}{4}} = \frac{512\pi}{\frac{3}{4}} = 512\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{2048}{3}\pi$

Odpowiedź: Suma pól pierścieni wynosi $\frac{2048}{3}\pi$

Zad 12. Z uwagi na to że trapez jest opisany na okręgu więc



$x + 2x = h + 10$ -

$h + 10 = 3x \qquad\qquad h = 10 - 3x$

Jak widać na rysunku mamy trójkąt prostokątny o bokach:

$h = 3x - 10; \qquad x; \qquad 10$

Stosując Tw. Pitagorasa mamy:

$x^2 + (3x-10)^2 = 10^2$

$x^2 + 9x^2 - 60x + 100 = 100$

$10x^2 - 60x = 0$

$x(10x - 60) = 0$

$x = 0 \qquad \vee \qquad 10x - 60 = 0$

$x_1 = 0 \qquad \vee \qquad 10x = 60 \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = 6$

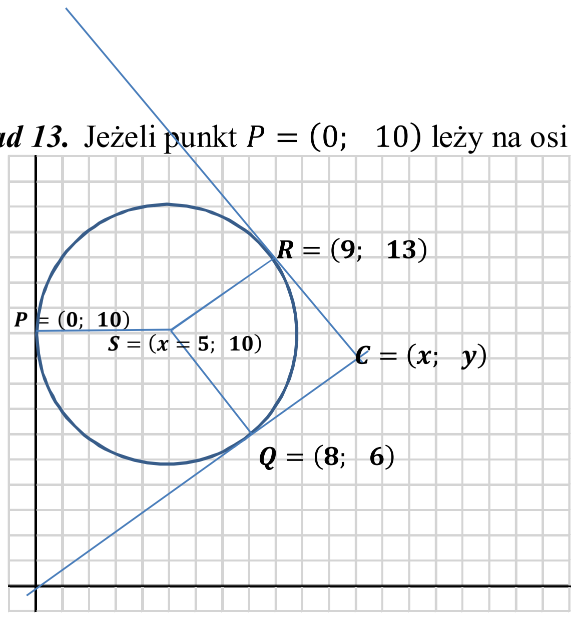
$x_1 = 0$ nie spełnia warunków zadania

Dla $x = 6$ mamy: $a = 2x = 12; \qquad b = 6; \qquad\qquad h = 3x - 10 = 3 \cdot 6 - 10 = 18 - 10 = 8$

$P = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{(12+6)8}{2} = \frac{18}{2} \cdot 8 = 9 \cdot 8 = 72$

Odpowiedź: Pole trapezu wynosi 72

Zad 13. Jeżeli punkt $P = (0;\ \ 10)$ leży na osi OY jest punktem styczności okręgu z osią OY to promień poprowadzony w tym punkcie jest prostopadły do prostej stycznej czyli do osi OY. Tak więc środek okręgu ma współrzędne $S = (x_1;\ \ 10)$. Czworokąt QCRS jest kwadratem bo ma przynajmniej trzy kąty proste przy wierzchołkach Q, R i C, a odcinki RS i QS = r są promieniami – dwa kolejne boki.



Łatwo można policzyć współrzędne środka okręgu korzystając z faktu że RS = QS czyli

$\sqrt{(9-x)^2 + (13-10)^2} = \sqrt{(8-x)^2 + (6-10)^2}$

$\sqrt{81 - 18x + x^2 + 9} = \sqrt{64 - 16x + x^2 + 16}$ czyli

$81 - 18x + x^2 + 9 = 64 - 16x + x^2 + 16$ czyli mamy:

$x^2 - 18x - x^2 + 16x = 64 + 16 - 81 - 9$

$-2x = -10 | : (-2) \qquad\qquad x = 5$

Mamy więc $S = (5;\ \ 10)$ współrzędne środka okręgu.
Teraz korzystając z faktu że czworokąt QCRS jest kwadratem to wektory $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{QC}$ są równe więc przyjmując $C = (x;\ \ y)$ mamy
$[9-5;\ \ 13-10] = [x-8;\ \ y-6]$
$[4;\ \ 3] = [x-8;\ \ y-6]$
$x - 8 = 4 \quad \wedge \quad y - 6 = 3$
$x = 12 \quad \wedge \quad y = 9$
Mamy więc $C = (12;\ \ 9)$
Teraz trzeba napisać równanie prostej QC $Q = (8;\ \ 6)$ $C = (12;\ \ 9)$
$a = \frac{9-6}{12-8} = \frac{3}{4} \qquad y = ax + b \qquad y = \frac{3}{4}x + b$ wstawmy punkt $C = (12;\ \ 9)$
$9 = \frac{3}{4} \cdot 12 + b \quad \Longrightarrow \quad 9 = 9 + b \quad \Longrightarrow \quad b = 0$
$y = \frac{3}{4}x + 0$ czyli $y = \frac{3}{4}x$ tak więc b = 0 czyli punkt $B = (0;\ \ 0)$
Pozostało wyznaczyć punkt A. Prosta CR jest prostopadła do QC więc $a = -\frac{4}{3}$ $\quad \left[\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -1\right]$
Mamy więc prostą CR $y = -\frac{4}{3}x + b$ i przechodzi przez punkt $C = (12;\ \ 9)$
$9 = -\frac{4}{3} \cdot 12 + b \quad \Longrightarrow \quad 9 = -4 \cdot 4 + b \quad \Longrightarrow \quad b = 25$
$y = -\frac{4}{3}x + 25$ $\quad b = 25$ mówi nam że prosta przecina oś OY w punkcie $A = (0;\ \ 25)$
Odpowiedź Współrzędne wierzchołków trójkąta ABC : $A = (0;\ \ 25)$; $\ B = (0;\ \ 0)$; $\ C = (12;\ \ 9)$

Zad 14. $x^2 - 3mx + (m+1)(2m-1) = 0$
a) ma być 2 pierwiastki czyli $\Delta > 0$.
$\Delta = (-3m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+1)(2m-1) = 9m^2 - 4(2m^2 - m + 2m - 1) =$
$= 9m^2 - 8m^2 + 4m - 8m + 4 = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$
$(m-2)^2 > 0 \quad (m-2)^2$ jako kwadrat liczby jest liczbą nieujemną $(m-2)^2 = 0$ dla $m = 2$
Mamy więc $\Delta > 0$ dla $m \in (-\infty;\ \ 2) \cup (2;\ \ \infty)$
b) $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ czyli trzeba określić dla jakiego *m* pierwiastki równania wynoszą 0.
$\Delta = (m-2)^2 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{(m-2)^2} = m - 2$
$x_1 = \frac{3m-m+2}{2} = \frac{2m+2}{2} = m + 1 \qquad x_2 = \frac{3m+m-2}{2} = \frac{4m-2}{2} = 2m - 1$
$m + 1 = 0 \qquad m = -1 \qquad \vee \qquad 2m - 1 = 0 \qquad 2m = 1|:2 \qquad m = \frac{1}{2}$
$x_1 = 0$ dla $m = -1 \qquad x_2 = 0$ dla $m = \frac{1}{2}$
Mamy więc $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ dla $m \in (-\infty;\ \ -1) \cup \left(-1;\ \ \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\ \ \infty\right)$
c) $0 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{2}{3}$ Mając już policzone: $x_1 = m + 1 \qquad x_2 = 2m - 1$ podany warunek przyjmuje postać: $0 < \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2m-1} \leq \frac{2}{3}$ Czyli mamy do rozwiązania dwie nierówności:

1) $0 < \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2m-1}$
$0 < \frac{1(2m-1)}{(m+1)(2m-1)} + \frac{1(m+1)}{(m+1)(2m-1)}$
$0 < \frac{2m-1}{2m^2-m+2m-1} + \frac{m+1}{2m^2-m+2m-1}$
$0 < \frac{2m-1+m+1}{2m^2-m+2m-1}$
$0 < \frac{3m}{2m^2+m-1}$
$3m(2m^2 + m - 1) > 0$

i

2) $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{2m-1} \leq \frac{2}{3}$
$\frac{1(2m-1)}{(m+1)(2m-1)} + \frac{1(m+1)}{(m+1)(2m-1)} - \frac{2}{3} \leq 0$
$\frac{3(2m-1)}{3(2m^2-m+2m-1)} + \frac{3(m+1)}{3(2m^2-m+2m-1)} - \frac{2(2m^2-m+2m-1)}{3(2m^2-m+2m-1)} \leq 0$
$\frac{6m-3+3m+3-4m^2+2m-4m+2}{6m^2-3m+6m-3} \leq 0$
$\frac{-4m^2+7m+2}{6m^2+3m-3} \leq 0 \qquad m \neq -1; \qquad m \neq \frac{1}{2}$
$(6m^2 + 3m - 3)(-4m^2 + 7m + 2) \leq 0$

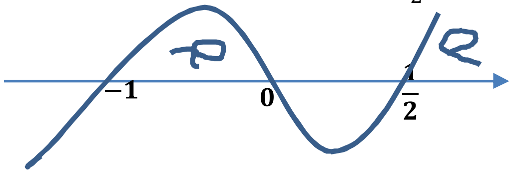
Teraz trzeba wielomiany 2 stopnia z nawiasów rozłożyć na iloczyny.
Zauważamy że $6m^2 + 3m - 3 = 3(2m^2 + m - 1)$
$2m^2 + m - 1 = 0 \qquad\qquad -4m^2 + 7m + 2 = 0$
$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9; \quad \sqrt{9} = 3 \quad i \quad \Delta = 7^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 2 = 49 + 32 = 81; \quad \sqrt{81} = 9$
$m_1 = \frac{-1-3}{2 \cdot 2} = \frac{-4}{4} = -1; \quad m_2 = \frac{-1+3}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad i \quad m_1 = \frac{-7-9}{2 \cdot (-4)} = \frac{-16}{-8} = 2; \quad m_2 = \frac{-7+9}{2 \cdot (-4)} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$
Tak więc nierówności można zapisać w postaci czynników liniowych:

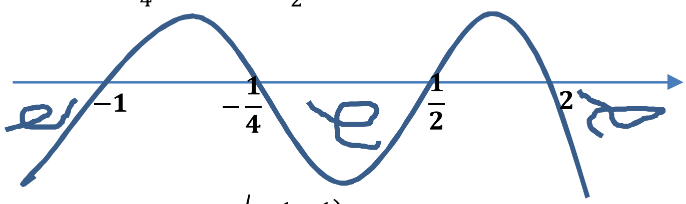
$3m \cdot 2(m+1)\left(m-\frac{1}{2}\right) > 0 \qquad\qquad 3 \cdot 2(m+1)\left(m-\frac{1}{2}\right)\cdot(-4)(m-2)\left(m+\frac{1}{4}\right) \le 0$

$6m(m+1)\left(m-\frac{1}{2}\right) > 0 \qquad\qquad -24(m+1)\left(m-\frac{1}{2}\right)(m-2)\left(m+\frac{1}{4}\right) \le 0$

Mamy pierwiastki wielomianów:

$m_1 = -1; \quad m_2 = 0; \quad m_3 = \frac{1}{2} \qquad i \qquad m_1 = -1; \; m_2 = -\frac{1}{4}; \quad m_3 = \frac{1}{2}; \quad m_4 = 2$





$m \in (-1; \;\; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; \;\; \infty\right) \qquad\qquad m \in (-\infty; \;\; -1) \cup \left\langle -\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \langle 2; \;\; \infty)$

Teraz bierzemy część wspólną wszystkich odpowiedzi i mamy odpowiedź końcową:

$$m \in \left\langle -\frac{1}{4}; \;\; 0\right) \cup (2; \;\; \infty)$$

Zad 15. Jak widać na rysunku mamy:

4 prostopadłościany o długości $(10-2x)-x = 10-3x$ – przód i tył na górze i na dole.
4 prostopadłościany o długości $6-x$ – po lewo i po prawo góra i dół
oraz 4 prostopadłościany stojące o długości $6-2x$
Tak więc łatwo można podać wzór na objętość wszystkich klocków:

$V = 4x^2(10-3x) + 4x^2(6-x) + 4x^2(6-2x) = 4x^2(10-3x+6-x+6-2x) =$
$= 4x^2(22-6x) = 88x^2 - 24x^3$

Mamy więc funkcję opisującą objętość drewna potrzebną na zbudowanie tej konstrukcji:

$V(x) = 88x^2 - 24x^3$

Aby ustalić dziedzinę tej funkcji trzeba sobie uświadomić że każda krawędź prostopadłościan musi być liczbą dodatnią. Jak również musi pozostać nie ujemna przestrzeń wewnątrz konstrukcji.

Mamy więc $x > 0; \quad 10-3x \ge x; \quad 6-x \ge 0; \quad 6-2x \ge 0$

$10-3x \ge x \qquad \wedge \qquad 6-x \ge 0 \qquad \wedge \qquad 6-2x \ge 0$

$-4x \ge -10 | : (-4) \qquad \wedge \qquad -x \ge -6 | : (-1) \qquad \wedge \qquad -2x \ge -6 | : (-2)$

$x \le 2\frac{1}{2} \qquad \wedge \qquad x \le 6 \qquad \wedge \qquad x \le 3$

Mamy więc dziedzinę $x \in \left(0; \;\; 2\frac{1}{2}\right\rangle$

Obliczamy teraz największą wartość tej funkcji:

$V(x) = 88x^2 - 24x^3 = 8x^2(11-3x)$

$V'(x) = 2 \cdot 88x - 3 \cdot 24x^2 = 176x - 72x^2$

$176x - 72x^2 = 0$ czyli $8x(22-9x) = 0$

$8x_1 = 0 \qquad \vee \qquad 22-9x = 0 | : (-9)$

$x_1 = 0 \qquad \vee \qquad x_2 = \frac{22}{9} = 2\frac{4}{9}$

$x_1 = 0$ nie należy do dziedziny i nie spełnia warunków zadania.

$x_2 = \frac{22}{9} = 2\frac{4}{9}$ to jest maksimum bo $V'(x) = 176x - 72x^2$ jako funkcja kwadratowa z gałęziami do dołu ma wierzchołek dla $p = x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-176}{2\cdot(-72)} = -\frac{176}{144} = -1\frac{32}{144} = -1\frac{2}{9}$. Tak więc dla $x \in \left(0; \;\; 2\frac{1}{2}\right\rangle$ jako dziedziny rozpatrywanej funkcji wartość pochodnej spada bo jest to przedział po prawej stronie od $p = -1\frac{2}{9}$ Obliczmy tą największą wartość objętości

$V\left(\frac{22}{9}\right) = 8\left(\frac{22}{9}\right)^2\left(11 - 3\cdot\frac{22}{9}\right) = 8\cdot\frac{484}{81}\left(11-\frac{22}{3}\right) = \frac{3872}{81}\cdot\left(11-7\frac{1}{3}\right) = \frac{3872}{81}\cdot 3\frac{2}{3} = \frac{3872}{81}\cdot\frac{11}{3} =$
$\frac{42592}{243} = 175\frac{67}{243}$

Odpowiedź: Funkcja opisująca objętość użytego drewna ma wzór $V(x) = 88x^2 - 24x^3$. Dziedziną tej funkcji jest $D = \left(0; \;\; 2\frac{1}{2}\right\rangle$ a największa objętość użytego drewna jest dla $x = 2\frac{4}{9}$ i objętość ta wynosi $V = 175\frac{67}{243}$