Listopad 2019 rok (poziom rozszerzony)
Zadania zamknięte

Zad 1. $\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{9-6\sqrt{2}+2}=\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}=3-\sqrt{2}$

Jeżeli ktoś nie wpadłby na ten pomysł to innym wyjściem jest podnoszenie do kwadratu poszczególnych odpowiedzi

$\left(3-\sqrt{2}\right)^2=3^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=9+6\sqrt{2}+2=11+6\sqrt{2}$ **(B)**

Zad 2. $f(x)=\log_{\frac{2x-3}{x+3}}(x^3-x^2)$ Określić dziedzinę

I) Liczba logarytmowana: $x^3-x^2>0 \quad\Rightarrow\quad x^3>x^2 \quad\Rightarrow\quad x\in(1;\ +\infty)$

II) Podstawa logarytmu: $\frac{2x-3}{x+3}>0 \quad\wedge\quad x+3\neq 0 \quad\wedge\quad \frac{2x-3}{x+3}\neq 1$

a) $\frac{2x-3}{x+3}>0 \qquad (2x-3)(x+3)>0 \qquad x_1=\frac{3}{2} \qquad x_2=-3 \qquad x\in(-\infty;\ -3)\cup(1{,}5;\ +\infty)$

b) $x+3\neq 0 \qquad x\neq -3$

c) $\frac{2x-3}{x+3}\neq 1 \qquad 2x-3\neq x+3 \qquad x\neq 6$

Teraz łącząc wszystkie warunki otrzymujemy cześć wspólną czyli $x\in(1{,}5;\ \ 6)\cup(6;\ +\infty)$ **(D)**

Zad 3. $W(x)=(7x^3-5x^2-2x+8)^5$

Zauważmy fakt że $W(1)=(7(1)^3-5(1)^2-2\cdot 1+8)^5=(7-5-2+8)^5=8^5={2^3}^5=2^{15}$ Jest sumą wszystkich współczynników wielomianu.

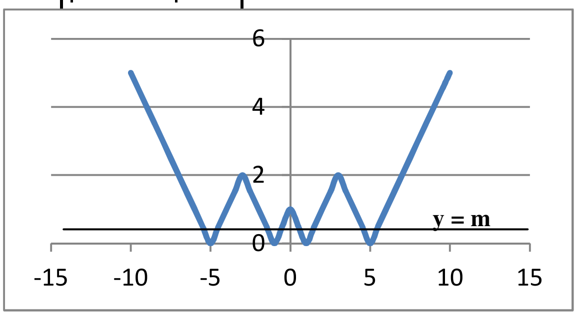
Natomiast $W(-1)=(7(-1)^3-5(-1)^2-2\cdot(-1)+8)^5=(-7-5+2+8)^5=(-2)^5=-2^5$

Jest sumą współczynników z potęgą parzystą wziętych z plusem i nieparzystych wziętych z minusem.

Teraz $W(1)-W(-1)$ da nam podwojoną sumę współczynników nieparzystych (a suma parzystych się zredukuje)

Natomiast $\frac{W(1)-W(-1)}{2}=\frac{2^{15}-(-2^5)}{2}=\frac{2^{15}+2^5}{2}=\frac{2^5(2^{10}+1)}{2}=2^4(2^{10}+1)$ jest odpowiedzią **(A)**

Zad 4. $\left|\left||x|-3\right|-2\right|=m$



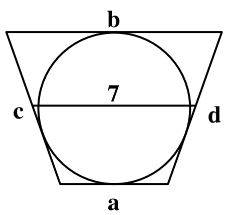
Widzimy że dla prostej $y=m$ dla $m\in(0;\ 1)$ prosta taka przecina wykres funkcji $y=\left|\left||x|-3\right|-2\right|$ w 8 miejscach, więc podane równanie może mieć 8 rozwiązań **(C)**

Zad 5. Wiemy że jeżeli czworokąt jest opisany na okręgu to dla długości boków zachodzi związek $a+b=c+d$.

Ponadto w trapezie odcinek łączący środki ramion to $\frac{a+b}{2}$ czyli:

$\frac{a+b}{2}=7$ tak więc $a+b=14$ oraz $c+d=14$ i ostatecznie mamy:

$a+b+c+d=14+14=28$



(C)

Zad 6. Na początek trzeba rozłożyć na czynniki trójmian $x^2+7x+10$

$\Delta=7^2-4\cdot 1\cdot 10=49-40=9 \qquad \sqrt{9}=3$

$x_1=\frac{-7-3}{2}=-5 \qquad x_2=\frac{-7+3}{2}=\frac{-4}{2}=-2$ czyli $x^2+7x+10=(x+5)(x+2)$

oraz ze wzoru na sumę sześcianów mamy: $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$

$\lim_{n\to -2}\frac{x^2+7x+10}{x^3+8}=\lim_{n\to -2}\frac{(x+5)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{n\to -2}\frac{(x+5)}{(x^2-2x+4)}=\frac{-2+5}{(-2)^2-2\cdot(-2)+4}=\frac{3}{4+4+4}=\frac{3}{12}=$ 0,25

Odpowiedź: $\boxed{0}\,\boxed{2}\,\boxed{5}$

Zad 7. $f(x) = \frac{x^2+8}{x+1}$ $\quad x \in \langle 0;\ \ 3\rangle$ $\quad x \neq -1$ ale $-1 \notin \langle 0;\ \ 3\rangle$ więc nie ma tu znaczenia

Policzmy wartości funkcji na końcach przedziału:

$f(0) = \frac{0^2+8}{0+1} = \frac{8}{1} = 8;$ $\qquad f(3) = \frac{3^2+8}{3+1} = \frac{9+8}{4} = \frac{17}{4} = 4{,}25$

Teraz jeszcze sprawdzić czy funkcja nie ma ekstremum lokalnego wewnątrz tego przedziału

$f'(x) = \frac{2x(x+1)-1(x^2+8)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2-8}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0$ czyli $x^2 + 2x - 8 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$ $\qquad \sqrt{36} = 6$

$x_1 = \frac{-2-6}{2} = -4$ $\qquad -4 \notin \langle 0;\ \ 3\rangle$ $\qquad x_2 = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2$ $\qquad 2 \in \langle 0;\ \ 3\rangle$

Teraz sprawdzimy jaką wartość ma funkcja w punkcie $x = 2$

$f(2) = \frac{2^2+8}{2+1} = \frac{4+8}{3} = \frac{12}{3} = 4$

Odpowiedź: w przedziale $\langle 0;\ \ 3\rangle$ największa wartość to $f(0) = 8$ a najmniejsza to $f(2) = 4$.

Zad 8. Wykazać że: $2x^2 + 5y^2 + 10 > 6xy + 4y$ czyli

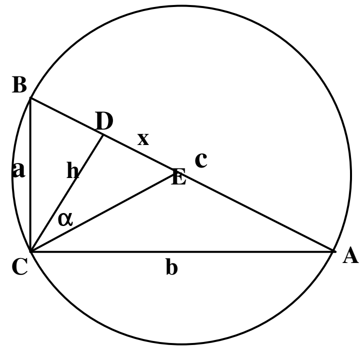
$2x^2 + 5y^2 + 10 - 6xy - 4y > 0$

W tej postaci trudno się połapać jakie zapisać różnice bądź sumy podniesione do kwadratu zastępujące to wyrażenie. Jeżeli pomnożymy całą nierówność przez 2 to zadanie staje się o wiele łatwiejsze.

$4x^2 + 10y^2 + 20 - 12xy - 8y > 0$ a następnie pogrupujemy:

$4x^2 - 12xy + 9y^2 + y^2 - 8y + 16 + 4 > 0$ i teraz ze wzorów na kwadrat różnicy mamy:

$(2x - 3y)^2 + (y - 4)^2 + 4 > 0$ To już jest nierówność oczywista. Mamy bowiem dwa kwadraty liczb które są na pewno nie ujemne a dodanie liczby 4 powoduje że całość jest zdecydowanie dodatnia.



Zad 9. Wykazać że $\tan\alpha = \frac{|a^2-b^2|}{2ab}$

Jest to trójkąt prostokątny więc $CD = h = \frac{a\cdot b}{c} = \frac{a\cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\tan\alpha = \frac{x}{h} = \frac{x}{\frac{a\cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a\cdot b}$

Odcinek CE jako środkowa jest połową odcinka AB wynika to z faktu że jak na trójkącie prostokątnym opiszemy okrąg to $BE = AE = CE = r$

$CE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$

Trójkąt CDE jest prostokątny bo CD wysokość. Stosując do niego Twierdzenie Pitagorasa mamy:

$x^2 + h^2 = CE^2$ czyli $x^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 - \left(\frac{a\cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2) - \frac{(ab)^2}{a^2+b^2} = \frac{1}{4}(a^2+b^2) - \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

$= \frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2)-4a^2b^2}{4(a^2+b^2)} = \frac{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2}{4(a^2+b^2)} = \frac{a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2}{4(a^2+b^2)} = \frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{4(a^2+b^2)} = \frac{(a^2-b^2)^2}{4(a^2+b^2)}$

$x = \sqrt{\frac{(a^2-b^2)^2}{4(a^2+b^2)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)}} = \frac{1}{2}\frac{|a^2-b^2|}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$

$\tan\alpha = \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a\cdot b} = \frac{\frac{1}{2}\frac{|a^2-b^2|}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{a\cdot b} = \frac{|a^2-b^2|}{2ab}$ $\qquad$ ***co było do wykazania***

Zad 10. $\cos 3x + \sin 7x = 0$ $\qquad x \in \langle 0;\ \ \pi\rangle$

wiemy że $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ tak więc równanie przyjmuje postać

$\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin 7x = 0$ Teraz ze wzoru $\sin\alpha + \sin\beta$ mamy:

$2\sin\frac{3x+\frac{\pi}{2}+7x}{2} \cdot \cos\frac{3x+\frac{\pi}{2}-7x}{2} = 0$ czyli $2\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ ***uwaga:*** $\boldsymbol{\cos x = \cos(-x)}$

Iloczyn wynosi zero jak jeden z czynników jest zero więc:

$\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ $\qquad \vee \qquad$ $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

1) $\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad 5x+\frac{\pi}{4}=0+k\pi \quad \Rightarrow \quad 5x=k\pi-\frac{\pi}{4}\,|:5$

$x=k\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{20}$

Teraz kolejno: $k=1 \ \Rightarrow x=\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{20}=\frac{3}{20}\pi;$ $\qquad k=2 \ \Rightarrow x=\frac{2}{5}\pi-\frac{\pi}{20}=\frac{7}{20}\pi;$

$k=3 \ \Rightarrow x=\frac{3}{5}\pi-\frac{\pi}{20}=\frac{11}{20}\pi;$ $\qquad k=4 \ \Rightarrow x=\frac{4}{5}\pi-\frac{\pi}{20}=\frac{15}{20}\pi=\frac{3}{4}\pi;$

$k=5 \Rightarrow x=\frac{5}{5}\pi-\frac{\pi}{20}=\frac{19}{20}\pi;$

2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \Rightarrow \quad 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+k\pi \quad \Rightarrow \quad 2x=\frac{3}{4}\pi+k\pi$

$x=\frac{3}{8}\pi+\frac{k}{2}\pi$

Teraz kolejno $k=0 \ \Rightarrow x=\frac{3}{8}\pi+0=\frac{3}{8}\pi;$ $\qquad k=1 \ \Rightarrow x=\frac{3}{8}\pi+\frac{1}{2}\pi=\frac{7}{8}\pi$

Odpowiedź: $x\in\left\{\frac{3}{20}\pi;\ \ \frac{7}{20}\pi;\ \ \frac{11}{20}\pi;\ \ \frac{3}{4}\pi;\ \ \frac{19}{20}\pi;\ \ \frac{3}{8}\pi;\ \ \frac{7}{8}\pi\right\}$

Zad 11. Urna: 4 kule białe i 8 czarnych

B – wylosowana kula biała $P(B)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ $\quad\Rightarrow$ Urna 6 kul białych i 8 czarnych, razem 14

C – wylosowano kulę czarną $P(C)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ $\quad\Rightarrow$ Urna 4 białe 7 czarnych i 2 zielone razem 13.

Teraz losujemy 2 kule:

Zdarzenie A – mają być białe

I) Zaszło zdarzenie B: $\overline{\overline{\Omega}}=\binom{14}{2}=\frac{14!}{2!\cdot 12!}=\frac{13\cdot 14}{2}=13\cdot 7=91$ $\qquad \overline{\overline{A}}=\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}=\frac{5\cdot 6}{2}=15$

$P(A|B)=\frac{15}{91}$

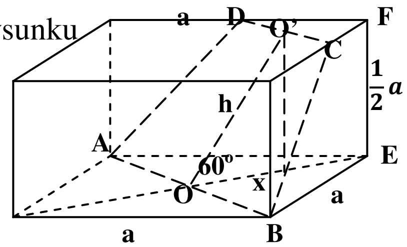
II) Zaszło zdarzenie C $\overline{\overline{\Omega}}=\binom{13}{2}=\frac{13!}{2!\cdot 11!}=\frac{12\cdot 13}{2}=13\cdot 6=78$ $\qquad \overline{\overline{A}}=\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{3\cdot 4}{2}=6$

$P(A|C)=\frac{6}{78}=\frac{1}{13}$

$P(A)=P(A|B)\cdot P(B)+P(A|C)\cdot P(C)=\frac{15}{91}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{13}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{91}+\frac{2}{39}=\frac{5\cdot 3}{91\cdot 3}+\frac{2\cdot 7}{39\cdot 7}=\frac{15}{273}+\frac{14}{273}=\frac{29}{273}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo tego że w II losowaniu będą dwie kule białe wynosi $\frac{29}{273}$.

Zad 12. Otrzymany przekrój graniastosłupa jest trapezem ABCD jak na rysunku



Dolna podstawa tego trapezu $AB=a\sqrt{2}$ - przekątna kwadratu

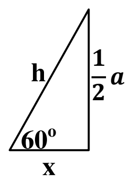
Wysokość trapezu jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem

60° Więc wysokość wyliczymy $\sin 60^\circ=\frac{\frac{1}{2}a}{h}$ $\qquad \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\frac{1}{2}a}{h}$

$h\sqrt{3}=2\cdot\frac{1}{2}a$ $\qquad h\sqrt{3}=a$ $\qquad h=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

teraz obliczymy długość trzeciego boku tego trójkąta:

$\cos 60^\circ=\frac{x}{h}$ $\qquad \frac{1}{2}=\frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}$ $\qquad x=\frac{a\sqrt{3}}{6}$



Teraz trzeba znaleźć sposób na wyliczenie długości górnej podstawy trapezu CD.

Trójkąty ABE i CDF są podobne (prostokątne równoramienne)

Wysokość trójkąta ABE to $OE=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ - połowa przekątnej kwadratu

Wysokość trójkąta CDF to $FO'=OE-x=\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{3a\sqrt{2}}{6}-\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{a(3\sqrt{2}-\sqrt{3})}{6}$

Trójkąt CDF jest prostokątny równoramienny i podstawa CD to $2\cdot FO'$ czyli:

$CD=2\cdot\frac{a(3\sqrt{2}-\sqrt{3})}{6}=\frac{a(3\sqrt{2}-\sqrt{3})}{3}$

Obliczamy pole trapezu ABCD $P=\frac{AB+CD}{2}\cdot h=\frac{a\sqrt{2}+\frac{a(3\sqrt{2}-\sqrt{3})}{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{\frac{3a\sqrt{2}}{3}+\frac{3a\sqrt{2}-a\sqrt{3}}{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}=$

$=\frac{\frac{6a\sqrt{2}-a\sqrt{3}}{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{(6a\sqrt{2}-a\sqrt{3})}{6}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{6a^2\sqrt{6}-3a^2}{18}=\frac{3a^2(2\sqrt{6}-1)}{18}=\frac{a^2(2\sqrt{6}-1)}{6}$

Odpowiedź: Pole tak otrzymanego przekroju tego graniastosłupa wynosi $\frac{a^2(2\sqrt{6}-1)}{6}$

Zad 13. $(m^2+m-3)x^2+(2m-1)x+2=0$

I) Równanie jest kwadratowe $a \neq 0$ czyli $m^2+m-3 \neq 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13$

$m_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ $\qquad m_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ czyli $m \notin \left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \ \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

II Równanie ma dwa rozwiązania czyli: $\Delta > 0$

$\Delta = (2m-1)^2 - 4 \cdot (m^2+m-3) \cdot 2 = 4m^2 - 4m + 1 - 8m^2 - 8m + 24 = -4m^2 - 12m + 25$

$-4m^2 - 12m + 25 > 0$

$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 25 = 144 + 400 = 544$ $\qquad \sqrt{544} = \sqrt{16 \cdot 34} = 4\sqrt{34}$

$m_1 = \frac{12-4\sqrt{34}}{2\cdot(-4)} = \frac{-4(-3+\sqrt{34})}{-8} = \frac{-3+\sqrt{34}}{2}$ $\qquad m_2 = \frac{12+4\sqrt{34}}{2\cdot(-4)} = \frac{-4(-3-\sqrt{34})}{-8} = \frac{-3-\sqrt{34}}{2}$

$m \in \left(\frac{-3-\sqrt{34}}{2}; \ \frac{-3+\sqrt{34}}{2}\right)$

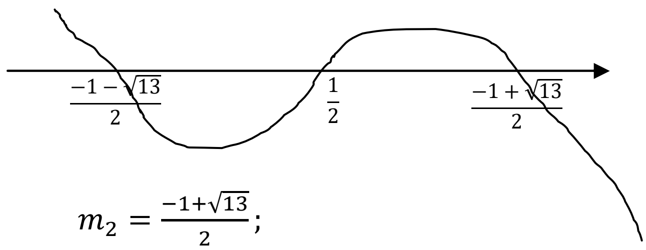
III) Rozwiązania są dodatnie czyli z wzorów Viete'a $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ oraz $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$

a) $-\frac{b}{a} = \frac{1-2m}{m^2+m-3} > 0$ czyli $(m^2+m-3)(1-2m) > 0$

Obliczmy tylko $1 - 2m = 0 \quad \Rightarrow \quad -2m = -1 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{2}$

Korzystając z obliczeń w punkcie I mamy $m_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$; $\qquad m_2 = \frac{1}{2}$; $\qquad m_3 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$;

$m \in \left(-\infty; \ \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \ \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$



b) $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$ czyli $\frac{2}{m^2+m-3} > 0$ czyli:

$2(m^2+m-3) > 0$

Teraz korzystając z tego co obliczone $m_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$; $\qquad m_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$;

$m \in \left(-\infty; \ \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \ +\infty\right)$

Teraz uwzględniając wszystkie otrzymane przedziały to ich część wspólna wynosi:

$m \in \left(\frac{-3-\sqrt{34}}{2}; \ \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)$

IV) Pierwiastek II ma być 2 razy większy od I czyli: $x_2 = 2 \cdot x_1$

Wstawiając ten warunek do wzorów Viete'a mamy:

$x_1 + x_2 = x_1 + 2 \cdot x_1 = 3x_1 = -\frac{b}{a} = \frac{1-2m}{m^2+m-3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1-2m}{3(m^2+m-3)}$

$x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot 2x_1 = 2x_1^2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{m^2+m-3} \quad \Rightarrow \quad x_1^2 = \frac{1}{m^2+m-3}$

Teraz wstawiając za x_1^2 i za x_1 wyznaczone wartości do równania początkowego

$(m^2+m-3)x^2+(2m-1)x+2=0$ mamy:

$(m^2+m-3)\frac{1}{m^2+m-3} + (2m-1)\frac{1-2m}{3(m^2+m-3)} + 2 = 0$ czyli:

$1 + \frac{(2m-1)(1-2m)}{3(m^2+m-3)} + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2m-4m^2-1+2m}{3(m^2+m-3)} + 3 = 0$

$\frac{2m-4m^2-1+2m}{3(m^2+m-3)} + \frac{9(m^2+m-3)}{3(m^2+m-3)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-4m^2+4m-1+9m^2+9m-27}{3(m^2+m-3)} = 0$

$\frac{5m^2+13m-28}{3(m^2+m-3)} = 0$ czyli $5m^2+13m-28=0$

$\Delta = 13^2 - 4 \cdot 5 \cdot (28) = 169 + 560 = 729$ $\qquad \sqrt{729} = 27$

$m_1 = \frac{-13-27}{10} = \frac{-40}{10} = -4$ $\qquad m_1 = \frac{-13+27}{10} = \frac{14}{10} = 1{,}4$

Trzeba jeszcze ustalić czy te liczby leżą w przedziale $\left(\frac{-3-\sqrt{34}}{2}; \ \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)$

$\frac{-3-\sqrt{34}}{2} \approx -4{,}415\cdots$ $\quad \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \approx -2{,}303$ tak więc widzimy że $-4 \in \left(\frac{-3-\sqrt{34}}{2}; \ \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)$ natomiast $1{,}4 \notin \left(\frac{-3-\sqrt{34}}{2}; \ \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)$

Odpowiedź: Jedynym rozwiązaniem spełniającym warunki zadania jest $m = -4$.

Zad 14. $x+6y-12=0$ $\qquad x+y-7=0$ $\qquad x-4y+18=0$

rozwiązując kolejne układy równań ustalamy punkty przecięcia prostych czyli wierzchołki trójkąta.

$$\begin{cases} x+6y-12=0 \\ x+y-7=0 \mid \cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+6y-12=0 \\ -x-y+7=0 \end{cases} \mid +$$

$6y-y=12-7 \quad \Rightarrow \quad 5y=5 \mid :5 \quad \Rightarrow \quad y=1$

I) $x+6\cdot 1-12=0 \quad \Rightarrow \quad x+6=12 \quad \Rightarrow \quad x=6$

$$\begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases} \quad \boldsymbol{A}=(\mathbf{6};\ \ \mathbf{1})$$

$$\begin{cases} x+6y-12=0 \\ x-4y+18=0 \mid \cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+6y-12=0 \\ -x+4y-18=0 \end{cases} \mid +$$

$6y+4y=12+18 \quad \Rightarrow \quad 10y=30 \mid :10 \quad \Rightarrow \quad y=3$

I) $x+6\cdot 3-12=0 \quad \Rightarrow \quad x=12-18 \quad \Rightarrow \quad x=-6$

$$\begin{cases} x=-6 \\ y=3 \end{cases} \quad \boldsymbol{B}=(-\mathbf{6};\ \ \mathbf{3})$$

$$\begin{cases} x+y-7=0 \\ x-4y+18=0 \mid \cdot(-1) \end{cases}$$

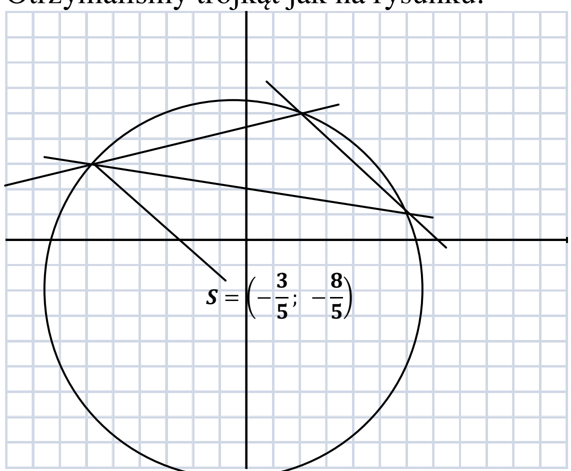
$$\begin{cases} x+y-7=0 \\ -x+4y-18=0 \end{cases} \mid +$$

$y+4y=7+18 \quad \Rightarrow \quad 5y=25 \mid :5 \quad \Rightarrow \quad y=5$

$x+5-7=0 \quad \Rightarrow \quad x=7-2 \quad \Rightarrow \quad x=2$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \quad \boldsymbol{C}=(\mathbf{2};\ \ \mathbf{5})$$

Otrzymaliśmy trójkąt jak na rysunku:



Pozostało znaleźć środek okręgu i długość promienia. Można to zrobić przynajmniej dwoma sposobami:

I) Wiemy że środek okręgu opisanego na trójkącie leży w punkcie przecięcia symetralnych boków. Można więc poszukać środków przynajmniej dwóch odcinków np. AB i BC, wyznaczyć proste prostopadłe do danych prostych a potem rozwiązać układ powstały równań.

II) Mamy równanie okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ i wstawiamy do niego współrzędne znanych punktów leżących na okręgu:

$$\begin{cases} (6-a)^2+(1-b)^2=r^2 \\ (-6-a)^2+(3-b)^2=r^2 \\ (2-a)^2+(5-b)^2=r^2 \end{cases} \text{ czyli } \begin{cases} 36-12a+a^2+1-2b+b^2=r^2 \\ 36+12a+a^2+9-6b+b^2=r^2 \\ 4-4a+a^2+25-10b+b^2=r^2 \end{cases}$$

Teraz porównajmy równania I z II oraz II z III i otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 36-12a+a^2+1-2b+b^2=36+12a+a^2+9-6b+b^2 \\ 36+12a+a^2+9-6b+b^2=4-4a+a^2+25-10b+b^2 \end{cases} \text{ kwadraty się redukują}$$

$$\begin{cases} -12a-12a-2b+6b=36-36-1+9 \\ 12a+4a-6b+10b=25-36-9+4 \end{cases}$$

$\begin{cases} -24a + 4b = 8 \mid : (-4) \\ 16a + 4b = -16 \mid : 4 \end{cases}$ $\quad\quad$ $\begin{cases} 6a - b = -2 \\ 4a + b = -4 \end{cases} \mid +$

$6a + 4a = -6 \qquad\qquad 10a = -6 \mid : 10 \qquad\qquad a = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$

$b = -4a - 4 = -4 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - 4 = \frac{12}{5} - 4 = \frac{12}{5} - \frac{20}{5} = -\frac{8}{5}$

$S = (a;\ \ b) = \left(-\frac{3}{5};\ -\frac{8}{5}\right)$ współrzędne środka okręgu

Pozostało policzyć promień okręgu aby napisać równanie okręgu

$(6-a)^2 + (1-b)^2 = r^2 \qquad r^2 = \left(6 + \frac{3}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{8}{5}\right)^2 = \left(\frac{33}{5}\right)^2 + \left(\frac{13}{5}\right)^2 = \frac{1089+169}{25} = \frac{1258}{25}$

Odpowiedź: Równanie okręgu ma postać: $\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{5}\right)^2 = \frac{1258}{25}$

Zad 15. $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x-3)^3} + \cdots \geq 2 - x$

Po lewej stronie mamy nieskończony ciąg geometryczny $a_1 = \frac{1}{x-3}$ oraz $q = \frac{1}{x-3}$. Aby był zbieżny czyli aby można było zastosować wzór $S = \frac{a_1}{1-q}$ musi być spełniony warunek $|q| < 1$ czyli musi być spełnione założenie $\left|\frac{1}{x-3}\right| < 1$ czyli $\frac{1}{x-3} < 1 \quad \wedge \quad \frac{1}{x-3} > -1$

a) Dla $x > 3$ czyli $x - 3 > 0$ $\frac{1}{x-3} > 0$ czyli $\left|\frac{1}{x-3}\right| = \frac{1}{x-3}$

mamy więc: $\frac{1}{x-3} < 1 \mid \cdot (x-3) \quad \Rightarrow \quad 1 < x - 3 \quad \Rightarrow \quad -x < -3 - 1 \quad \Rightarrow \quad x > 4$

b) Dla $x < 3$ czyli $x - 3 < 0$ $\frac{1}{x-3} < 0$ czyli $\left|\frac{1}{x-3}\right| = -\frac{1}{x-3}$

mamy więc: $-\frac{1}{x-3} > -1 \mid \cdot (x-3) \quad \Rightarrow -1 < -1(x-3) \quad \Rightarrow -1 < -x + 3 \quad \Rightarrow \quad x < 2$

$D = (-\infty;\ \ 2) \cup (4;\ \ +\infty)$

teraz rozwiązujemy nierówność wynikające z $S = \frac{a_1}{1-q}$ czyli $\frac{\frac{1}{x-3}}{1-\frac{1}{x-3}} \geq 2 - x$

$\frac{\frac{1}{x-3}}{\frac{x-3}{x-3} - \frac{1}{x-3}} \geq 2 - x \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{x-3}}{\frac{x-3-1}{x-3}} \geq 2 - x \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{x-3}}{\frac{x-4}{x-3}} \geq 2 - x$

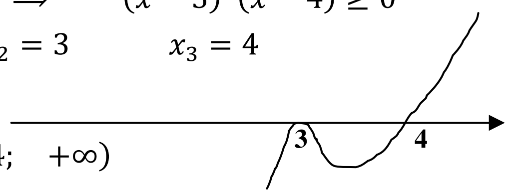
$\frac{1}{x-3} \cdot \frac{x-3}{x-4} \geq 2 - x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x-4} \geq 2 - x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x-4} - (2 - x) \geq 0$

$\frac{1}{x-4} - \frac{(2-x)(x-4)}{x-4} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - (2x - 8 - x^2 + 4x)}{x-4} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - 2x + 8 + x^2 - 4x}{x-4} \geq 0$

$\frac{x^2 - 6x + 9}{x-4} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 - 6x + 9)(x - 4) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2(x-4) \geq 0$

$x - 3 = 0 \quad \vee \quad x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = 3 \qquad x_3 = 4$

$x \in (4;\ \ +\infty)$



Odpowiedź: Rozwiązaniem nierówności jest przedział $x \in (4;\ \ +\infty)$

Zad 16. Graniastosłup prawidłowy sześciokątny. Pole podstawy to $P_p = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$P_{pc} = 2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 6aH = 3a^2\sqrt{3} + 6aH = S\sqrt{3}$

$3a^2\sqrt{3} + 6aH = S\sqrt{3}$ i stąd $6aH = S\sqrt{3} - 3a^2\sqrt{3} \mid : 6a$

$H = \frac{S\sqrt{3} - 3a^2\sqrt{3}}{6a}$

$V = P_p \cdot H$ gdzie $P_p = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ czyli $V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H$ i stąd $V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{S\sqrt{3} - 3a^2\sqrt{3}}{6a} = \frac{3a^2\sqrt{3} \cdot (S\sqrt{3} - 3a^2\sqrt{3})}{12a} =$

$= \frac{3 \cdot 3Sa^2 - 9 \cdot 3a^4}{12a} = \frac{3a^2(3S - 9a^2)}{12a} = \frac{a(3S - 9a^2)}{4}$

Mamy więc objętość graniastosłupa jako funkcję krawędzi ***a***

$V(a) = \frac{a(3S - 9a^2)}{4} = \frac{3Sa}{4} - \frac{9a^3}{4}$ Aby określić dziedzinę tej funkcji oczywistym jest że $a > 0$ jako długość krawędzi, ale także musi być $H > 0$ jako wysokość graniastosłupa czyli $\frac{S\sqrt{3} - 3a^2\sqrt{3}}{6a} > 0$ co daje

że $\frac{S\sqrt{3}}{6a} > \frac{3a^2\sqrt{3}}{6a} \Big| \cdot 6a \quad \Rightarrow \quad S\sqrt{3} > 3a^2\sqrt{3} \Big| : \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad S > 3a^2 | : 3 \quad \Rightarrow \quad a^2 < \frac{S}{3}$ i już wiemy
ze $a > 0$ to $a < \sqrt{\frac{S}{3}}$ $\quad a < \frac{\sqrt{3S}}{3}$ Mamy więc $a \in \left(0; \quad \frac{\sqrt{3S}}{3}\right)$
$V(a) = \frac{a(3S-9a^2)}{4} = \frac{3Sa}{4} - \frac{9a^3}{4}$
$V'(a) = \frac{3S}{4} - 3 \cdot \frac{9a^2}{4} = \frac{3S}{4} - \frac{27a^2}{4}$ Szukamy ekstremum czyli $\frac{3S}{4} - \frac{27a^2}{4} = 0$
$\frac{27a^2}{4} = \frac{3S}{4} \quad \Rightarrow \quad 27a^2 = 3S | : 27 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{S}{9} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sqrt{S}}{3}$
Widzimy że dla $a > \frac{\sqrt{S}}{3}$; $\quad \frac{27a^2}{4} > \frac{3S}{4}$ czyli mamy $V'(a) < 0$
natomiast dla $a < \frac{\sqrt{S}}{3}$; $\quad \frac{27a^2}{4} < \frac{3S}{4}$ czyli mamy $V'(a) > 0$
wynika to chociażby z faktu że funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca dla $x > 0$
Tak więc dla $a = \frac{\sqrt{S}}{3}$ mamy maksimum.
Obliczmy tą objętość. Czyli podstawmy do wzoru na objętość: $a = \frac{\sqrt{S}}{3}$

$$V(a) = \frac{3Sa}{4} - \frac{9a^3}{4} = V\left(\frac{\sqrt{S}}{3}\right) = \frac{3S\frac{\sqrt{S}}{3}}{4} - \frac{9\left(\frac{\sqrt{S}}{3}\right)^3}{4} = \frac{S\sqrt{S}}{4} - \frac{9\frac{S\sqrt{S}}{27}}{4} = \frac{S\sqrt{S}}{4} - \frac{\frac{S\sqrt{S}}{3}}{4} = \frac{S\sqrt{S}}{4} - \frac{S\sqrt{S}}{12} = \frac{2S\sqrt{S}}{12} = \frac{S\sqrt{S}}{6}$$