Matura Operon listopad 2019r
(Poziom podstawowy)
Zadania zamknięte

Zad 1. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)^2=\sqrt{3}^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{6}^2=3-2\sqrt{18}+6=9-2\sqrt{9\cdot 2}=9-2\cdot 3\sqrt{2}$ **(B)**

Zad 2. $|x|\le 4$ to znaczy $x\le 4$ i $x\ge -4$ czyli $x\in\langle -4;\ \ 4\rangle$ **(A)**

Zad 3. $3\log 2+\log 5^3=3\log 2+3\log 5=3(\log 2+\log 5)=3\log(2\cdot 5)=3\log 10=3\cdot 1=3$ **(D)**

Zad 4. x - cena początkowa
$x-20\%x=x-0{,}2x=0{,}8x$ cena po I obniżce
$0{,}8x-10\%\cdot 0{,}8x=0{,}8x-0{,}1\cdot 08x=0{,}8x-0{,}08x=0{,}72x$ - cena po II obniżce
$0{,}72x=72\%x \qquad 100\%x-72\%x=28\%x$ - tyle obniżono **(C)**

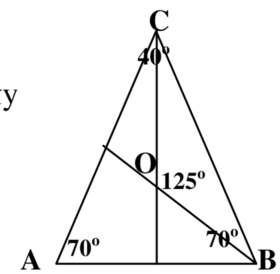
Zad 5. $0{,}3(7)+0,(7)=\frac{3}{10}+\frac{7}{90}+\frac{7}{9}=\frac{27}{90}+\frac{7}{90}+\frac{70}{90}=\frac{104}{90}=\frac{52}{45}$
Pokażemy że $0{,}0(7)=\frac{7}{90}$ Niech $x=0{,}0(7)=0{,}0777\ldots$ to $10x=0{,}7777\ldots$
Mamy więc $9x=10x-x=0{,}7777\ldots-0{,}0777\ldots=0{,}7$
$9x=0{,}7|:9 \qquad x=\frac{0{,}7}{9}=\frac{7}{90}$ **(A)**

Zad 6. Zgodnie z definicją funkcji tu określonej mamy
$f(22)=11$ 11 jest dzielnikiem liczby 22 i jest liczbą pierwszą
$f(28)=7$ fałszywe mamy $f(28)>9$ bo $7<9$ **(D)**

Zad 7. $f(x)=\frac{1}{7}(x-5)(x+9)$ miejsce zerowe to $x_1=5;\quad x_2=-9$
oś symetrii leży pośrodku między miejscami zerowymi $\frac{5+(-9)}{2}=\frac{-4}{2}=-2$
$x=-2$ jest osią symetrii **(C)**

Zad 8. $f(x)=(m^2-3)x+2$ Funkcja jest rosnąca gdy $a>0$ czyli $m^2-3>0$.
$\left(m+\sqrt{3}\right)\left(m-\sqrt{3}\right)>0$ Pierwiastki równania to $m_1=-\sqrt{3} \qquad m_2=\sqrt{3}$
a nierówność jest spełniona dla $m\in\left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\ +\infty\right)$ **(B)**

Zad 9. Jeżeli trójkąt ABC równoramienny to kąty przy podstawie są równe, natomiast kąt przy wierzchołku C ma miarę
$180°-2\cdot 70°=180°-140°=40°$. Kąty w trójkącie BCO powstały w wyniku prowadzenia dwusiecznych BO i CO
Mamy więc kąty $20°;\quad 35°$ oraz
$180°-(20°+35°)=180°-55°=125°$

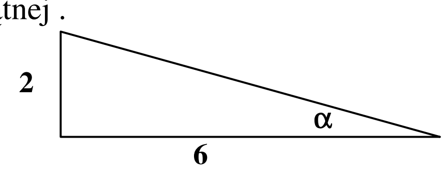


(D)

Zad 10. $P=\frac{a+b}{2}\cdot h=20cm^2$ $\frac{a+b}{2}$ jest średnią z długości podstaw i wartość tej średniej jest długością odcinka łączącego środki ramion.
czyli $\frac{a+b}{2}=4$ tak więc $20=4\cdot h$ co daje $h=5$ **(A)**

Zad 11. $(2x-5)(3x+2)=(x+5)(3x+2)$
$(2x-5)(3x+2)-(x+5)(3x+2)=0$
$(3x+2)[(2x-5)-(x+5)]=0$
$(3x+2)(2x-5-x-5)=0$
$(3x+2)(x-10)=0$
$3x+2 \qquad \vee \qquad x-10=0$
$x_1=-\frac{2}{3} \qquad x_2=10$ **(A)**

Zad 12. aby policzyć sinus kąta trzeba policzyć długość przeciwprostokątnej .
$2^2+6^2=c^2 \qquad c^2=4+36=40$
$c=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$
$\sin\alpha=\frac{2}{2\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$



(D)

Zad 13. ***(Nie przypuszczajmy że zadanie ma II odpowiedzi dobre)*** Jak widać z wykresu funkcja ta jest rosnąca. Każdy też wie że: $R\backslash\{0\}=(-\infty;\ \ 0)\cup(0;\ +\infty)$ Ale odpowiedź D to nie suma zbiorów tylko $(-\infty;\ \ 0)\ i\ (0;\ +\infty)$ Chodzi o to że przedziały $(-\infty;\ \ 0)$ oraz $(0;\ +\infty)$ trzeba rozpatrywać

oddzielnie. Łatwo pokazać że C jest błędną odpowiedzią. Przyjmijmy: $x_1 = -1 \quad x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 < x_2$
to $f(x_1) = 1 \quad f(x_2) = -1$ i mamy $f(x_1) > f(x_2)$ **(D)**

Zad 14. $a_6 = 0$ ciąg arytmetyczny; wiedząc że w ciągu arytmetycznym $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} = a_n$ Mamy:
$\frac{a_5+a_7}{2} = a_6 = 0$ i tak dalej do $\frac{a_1+a_{11}}{2} = a_6 = 0$ co daje że cała suma 0 **(A)**

Zad 15. $a_3 = \frac{1}{2} \qquad a_6 = \frac{1}{16}$ – ciąg geometryczny
$a_3 = a_2 \cdot q = \frac{1}{2} \qquad a_6 = a_2 \cdot q^4 = a_2 \cdot q \cdot q^3 = \frac{1}{2} \cdot q^3 = \frac{1}{16}$
$\frac{1}{2} \cdot q^3 = \frac{1}{16} | \cdot 2 \qquad q^3 = \frac{1}{8} \qquad q = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$
Teraz wracając do $a_3 = a_2 \cdot q = \frac{1}{2}$ Mamy $\frac{1}{2} = a_2 \cdot \frac{1}{2}$ czyli $a_2 = 1$ **(C)**

Zad 16. Typowa sytuacja proporcjonalności odwrotnej $x \cdot y = a$ lub
$y = \frac{a}{x}$ gdzie ***a*** wielkość stała (ilość pracy do wykonania)
$6h20min = 6\frac{20}{60}h = 6\frac{1}{3}h$
$6 \cdot 6\frac{1}{3} = 8 \cdot y \qquad 8y = 36\frac{6}{3} = 38$
$y = \frac{38}{8} = 4\frac{6}{8} = 4\frac{3}{4} = 4h45min$ **(B)**

Zad 17. Stosunek obwodów i stosunek boków figur podobnych jest taki sam
(zadanie byłoby trudniejsze gdyby byłoby związane z polem figur podobnych)
$a_2 = 12 \cdot \frac{3}{4} = \frac{12 \cdot 3}{4} = \frac{36}{4} = 9$ **(D)**

Zad 18. $g(x) = f(x+4)$ jest to przesunięcie wzdłuż osi OX o 4 jednostki w lewo zgodnie z zasadą
$g(x) = f(x-a)$ - przesunięcie o ***a*** **(C)**

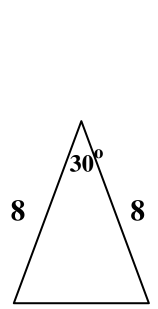
Zad 19. $\frac{x^2-9}{x-3} = 0 \qquad D = R\backslash\{3\}$ dla $x = 3$ mianownik jest zerem więc równanie nie ma sensu.
$x^2 - 9 = 0 \qquad (x-3)(x+3) = 0$
$x - 3 = 0 \quad \vee \quad x + 3 = 0$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$ ale $x_1 = 3 \notin D$ Mamy jedno rozwiązanie **(B)**

Zad 20. W trójkącie równobocznym środek ciężkości to to samo co punkt przecięcia wysokości i leży w odległości $\frac{1}{3}h$ od boku $a = 8 \qquad \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ **(B)**

Zad 21. Jeżeli mediana wynosi 7,5 to znaczy że liczby środkowe mogą być np. 7; 8 $\quad \frac{7+8}{2} = 7{,}5$
Odpowiedzią spełniającą warunki jest tylko D i mamy zbiór 4; 6; 7; 8; 8; 9 **(D)**

Zad 22. $d = 6$ - przekątna sześcianu. Wiemy że $d = a\sqrt{3}$ czyli $a\sqrt{3} = 6$
$a = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$
$V = a^3 = \left(2\sqrt{3}\right)^3 = 2^3 \cdot \sqrt{3}^3 = 8 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ **(A)**

Zad 23. Pole przekroju osiowego czyli pole narysowanego trójkąta
$P = \frac{1}{2}a \cdot a \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 30° = 4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot 4 = 16$



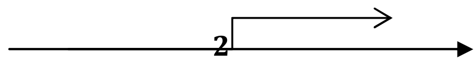
(C)

Zad 24. $\{litera;\ cyfra;\ litera\}$ i litery mogą się powtarzać czyli mamy:
$24 \cdot 10 \cdot 24 = 5760$ **(C)**

Zad 25. Typowa sytuacja średniej ważonej czyli $Śr = \frac{6 \cdot 3{,}5 + 4 \cdot 4{,}5}{10} = \frac{21+18}{10} = \frac{39}{10} = 3{,}9$ **(C)**

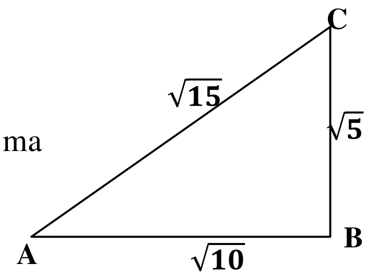
Zadania otwarte

Zad 26. $2^{13}x - 3 \cdot 4^6 < 8^4(3x-5)$
$2 \cdot 2^{12}x - 3 \cdot (2^2)^6 < (2^3)^4(3x-5)$
$2^{12} \cdot 2x - 3 \cdot 2^{12} < 2^{12}(3x-5) | : 2^{12}$
$2x - 3 < 3x - 5$
$2x - 3x < 3 - 5 \qquad -x < -2 | : (-1)$



$x > 2$
Odp: $x \in (2;\ \ +\infty)$

Zad 27. Trzeba zauważyć że podany trójkąt jest prostokątny

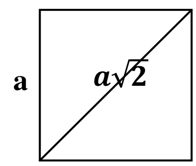


Korzystając z Twierdzenia odwrotnego do Tw. Pitagorasa mamy:
$(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{10})^2 = (\sqrt{15})^2$ czyli $5 + 10 = 15$
Teraz trzeba wiedzieć że okrąg opisany na trójkącie prostokątnym ma środek na połowie przeciwprostokątnej
czyli przeciwprostokątna jest średnicą.
Mamy więc $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{15} = \frac{\sqrt{15}}{2}$
Długość promienia tego okręgu to $r = \frac{\sqrt{15}}{2}$

Zad 28. $A = (-2;\ \ 3) \quad B = (2;\ \ 5) \quad C = (2\sqrt{2};\ \ 4 + \sqrt{2})$ Czy są współliniowe?
Korzystając ze współrzędnych punków A i B obliczmy współczynnik kierunkowy prostej AB
$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-3}{2-(-2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ Prosta AB ma postać $y = \frac{1}{2}x + b$ i przechodzi przez $B = (2;\ \ 5)$
$5 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b \qquad 5 = 1 + b \qquad b = 4$
Mamy więc wzór prostej $y = \frac{1}{2}x + 4$
Sprawdźmy czy punkt $C = (2\sqrt{2};\ \ 4 + \sqrt{2})$ leży na tej prostej
$4 + \sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} + 4$ co daje $4 + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 4$
Odpowiedź: Tak więc widzimy że punkt $C = (2\sqrt{2};\ \ 4 + \sqrt{2})$ spełnia równanie prostej $y = \frac{1}{2}x + 4$ czyli leży na tej prostej co oznacza że są współliniowe.

Zad 29. $x^2 + (a-1)x - a = 0$ Mamy równanie kwadratowe z parametrem w którym:
$\boldsymbol{a} = 1; \qquad \boldsymbol{b} = a - 1; \qquad \boldsymbol{c} = -a$
$\Delta = b^2 - 4ac = (a-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a) = a^2 - 2a + 1 + 4a = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$
Aby równanie miało rozwiązanie musi być spełniony warunek $\Delta \geq 0$
Tu mamy $\Delta = (a+1)^2$
Odpowiedź: Wyrażenie $(a+1)^2$ jest liczbą nie ujemną jako kwadrat pewnej liczby co kończy dowód.

Zad 30. Wiemy że przekątna kwadratu to $a\sqrt{2}$ gdy $\boldsymbol{a}$ to bok kwadratu.

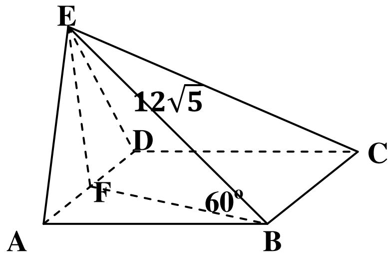


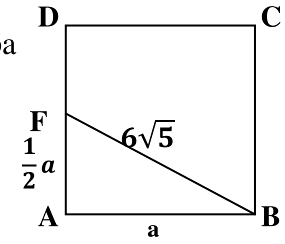
Mamy więc $a + a\sqrt{2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad a(1 + \sqrt{2}) = 1|:(1 + \sqrt{2})$
$a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1$
$a\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1) \cdot \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$
Odpowiedź Przekątna kwadratu ma długość $2 - 1\sqrt{2}$

Zad 31. Dwukrotny rzut kostką do gry więc $\overline{\overline{\Omega}} = 6 \cdot 6 = 36 \qquad \Omega = \{(1,1); \dots; (6,6)\}$
$A = \{(1,2); (2,4); (3,6)\} \qquad \overline{\overline{A}} = 3$
$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym że za drugim rzutem wypadło dwa razy więcej oczek niż za pierwszym wynosi $\frac{1}{12}$.

Zad 32. Przyjmijmy oznaczenia $a_1 = a; \qquad a_2 = a - 4; \qquad a_3 = a - 8$ ciąg arytmetyczny.
$a + 3; \qquad a - 4 + 3; \qquad a - 8 + 4$ - ciąg geometryczny
czyli $a + 3; \qquad a - 1; \qquad a - 4$ - ciąg geometryczny
Dla ciągu geometrycznego mamy zależność: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$ czyli $\frac{a-1}{a+3} = \frac{a-4}{a-1}$
$(a-1)^2 = (a+3)(a-4)$
$a^2 - 2a + 1 = a^2 - 4a + 3a - 12$
$a^2 - a^2 - 2a + 4a - 3a = -12 - 1$
$-a = -13|:(-1) \qquad a = 13$
Odpowiedź: $\{13;\ \ 9;\ \ 5\}$ ciąg arytmetyczny
$\{16;\ \ 12;\ \ 9\}$ ciąg geometryczny.

Zad 33. Mamy dane $|EB| = 12\sqrt{5}$ i $\sphericalangle FBE = 60°$





Korzystając z trójkąta BEF mamy:

$\cos 60° = \frac{BF}{12\sqrt{5}}$ czyli $\frac{1}{2} = \frac{BF}{12\sqrt{5}}$

$2BF = 12\sqrt{5}$ $\qquad BF = 6\sqrt{5}$

oraz $\sin 60° = \frac{EF}{12\sqrt{5}}$ czyli $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{EF}{12\sqrt{5}}$

$2EF = 12\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = 12\sqrt{15}$ $\qquad EF = 6\sqrt{15}$ - wysokość ostrosłupa

Teraz korzystając z faktu że podstawa jest kwadratem mamy:

$a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \left(6\sqrt{5}\right)^2$

$a^2 + \frac{1}{4}a^2 = 36 \cdot 5$ $\qquad \frac{5}{4}a^2 = 180| \cdot \frac{4}{5}$

$a^2 = 144$ $\qquad a = \sqrt{144} = 12$

$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 6\sqrt{15} = 2 \cdot 144\sqrt{15} = 288\sqrt{15}$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa wynosi $288\sqrt{15}$

Zad 34. ***x*** – ilość kartonów

y – ilość róż w jednym kartonie

$x \cdot y = 480$

Gdyby jednak pakowano po $y - 3$ róże to kartonów by było $x + 8$

$(x+8)(y-3) = 480$ Mamy więc układ równań

$\begin{cases} x \cdot y = 480 |: x \\ (x+8)(y-3) = 480 \end{cases}$

$\begin{cases} y = \frac{480}{x} & x \neq 0 \\ xy - 3x + 8y - 24 = 480 \end{cases}$ Dalej przepisuję tylko II równanie

$x \cdot \frac{480}{x} - 3x + 8 \cdot \frac{480}{x} - 24 = 480$

$480 - 3x + \frac{3840}{x} - 24 - 480 = 0$ $\qquad -3x + \frac{3840}{x} - 24 = 0| \cdot x$

$-3x^2 + 3840 - 24x = 0|:(-3)$

$x^2 + 8x - 1280 = 0$

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1280) = 64 + 5120 = 5184$ $\qquad \sqrt{5184} = 72$

$x_1 = \frac{-8-72}{2} = \frac{-80}{2} = -40$ $\qquad x_2 = \frac{-8+72}{2} = \frac{64}{2} = 32$

$x_1 = -40$ niezgodny z warunkami zadania.

Dla $x_2 = 32$ mamy $y = \frac{480}{x} = \frac{480}{32} = 15$

Mamy jedno rozwiązanie spełniające warunki zadania $\begin{cases} x = 32 \\ y = 15 \end{cases}$

Odpowiedź: Róże były zapakowane w 32 kartony po 15 szt. w kartonie.