Matura poprawkowa sierpień 2019r

Zadania zamknięte

Zad 1. $\log_{\sqrt{7}} 7 = x \iff \sqrt{7}^x = 7$ czyli $\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^x = 7^1 \iff \frac{1}{2} \cdot x = 1 \quad x = 2$ **(A)**

Zad 2. $\left(8 - 3\sqrt{7}\right)^2 = 64 - 2 \cdot 8 \cdot 3\sqrt{7} + \left(3\sqrt{7}\right)^2 = 64 - 48\sqrt{7} + 9 \cdot 7 = 64 + 63 - 48\sqrt{7} = 127 - 48\sqrt{7}$ **(B)**

Zad 3. $0{,}75a = 177 |: 0{,}75 \qquad 0{,}59b = 177 |: 0{,}59$

$a = 236 \qquad b = 300$

$b - a = 300 - 236 = 64$ **(B)**

Zad 4. $x(5x + 1) = 5x + 1$ dla $x = 1$ mamy równość $1(5 + 1) = 5 + 1$

dla $x = -\frac{1}{5}$ mamy równość $-\frac{1}{5}(-1 + 1) = -1 + 1$ czyli $0 = 0$

Można też rozwiązać równanie kwadratowe $5x^2 + x = 5x + 1$ **(C)**

Zad 5. $\begin{cases} -x + 12y = a^2 \\ 2x + ay = 9 \end{cases}$ $\quad x = 3; \quad y = 1$ wstawiając **x** i **y** do układu mamy:

$\begin{cases} -3 + 12 \cdot 1 = a^2 \\ 2 \cdot 3 + a \cdot 1 = 9 \end{cases}$ czyli $\begin{cases} 9 = a^2 \\ 6 + a = 9 \end{cases} \implies a = 3$ **(C)**

Zad 6. $\frac{(x-2)(x+4)}{(x-4)^2} = 0$ z uwagi na mianownik $x \neq 4$

rozwiązując licznik $(x - 2)(x + 4) = 0$ mamy $x - 2 = 0 \lor x + 4 = 0$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -4$ **(C)**

Zad 7. $f(x) = 9 - (3 - x)^2$ czyli $f(x) = -(3 - x)^2 + 9$ Trzeba zauważyć że $(3 - x)^2 = (x - 3)^2$ czyli wierzchołek ma współrzędne $(3; \; 9)$

więc miejsce zerowe mogą być tylko $(x_1 = 0 \quad x_2 = 6)$ **(D)**

Zad 8. Zbiór wartości jest na osi OY wykresu. Widzimy że ten wykres ma najwyższy punkt $y = 1$ i gałęzie zwrócone do dołu czyli $Zbw = (-\infty; \; 1\rangle$ **(D)**

Zad 9. $125^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = 5^2 = 25$ **(C)**

Zad 10. $A = (a; \; 3) \qquad y = \frac{3}{4}x + 6$ wstawiając współrzędne punktu do wzoru funkcji mamy:

$3 = \frac{3}{4}a + 6 \implies \frac{3}{4}a = 3 - 6 \qquad \frac{3}{4}a = -3$

$a = -3 \cdot \frac{4}{3} = -4$ **(A)**

Zad 11. $a_1 = -11 \qquad a_9 = 5$ - ciąg arytmetyczny

$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{-11+5}{2} \cdot 9 = \frac{-6}{2} \cdot 9 = -3 \cdot 9 = -27$ **(B)**

Zad 12. $a_2 = 162 = a_1 \cdot q \qquad a_5 = 48 = a_1 \cdot q^4$ Ciąg geometryczny.

$\begin{cases} a_1 \cdot q = 162 \\ a_1 \cdot q^4 = 48 \end{cases}$ Dzieląc II równanie przez I mamy

$\frac{a_1 \cdot q^4}{a_1 \cdot q} = q^3 = \frac{48}{162} = \frac{8}{27} \qquad q = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$ **(A)**

Zad 13. $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ czyli $\sin^2\alpha + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{144}{169} \implies \sin^2\alpha = \frac{25}{169}$ czyli: $\sin\alpha = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$ **(C)**

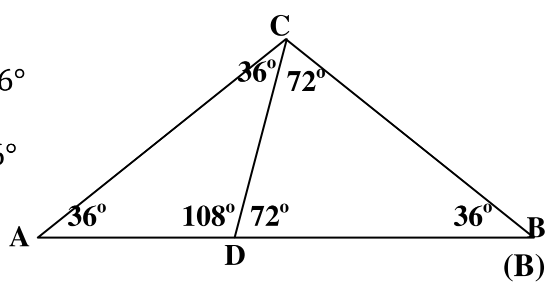
Zad 14. Jeżeli $BD = BC$ to $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BDC = 72°$

teraz z sumy kątów w trójkącie BCD mamy:

$180° - 2 \cdot 72° = 180° - 144° = 36° \qquad \sphericalangle CBD = 36°$

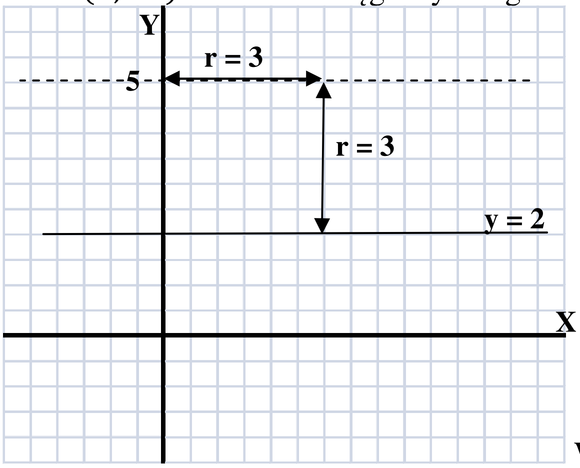
trójkąt ABC jest równoramienny więc $\sphericalangle BAC = 36°$

trójkąt ADC jest też równoramienny więc $\sphericalangle ACD = 36°$



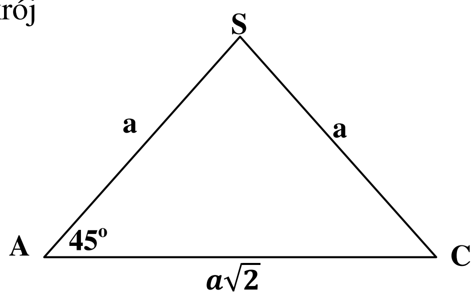
(B)

Zad 15. $S = (a;\ \ 5)$ – środek okręgu stycznego do OY i do $y = 2$



Widzimy że r = 3. **(A)**

Zad 16. Jeżeli wszytkie krawędzie mają długość a , to przekrój ostrosłupa ASC wygląda jak na rysunku i $AC = a\sqrt{2}$ - przekątna kwadratu
wida stąd że trójkąt ACS jest też połową kwadtaru
czyli $\sphericalangle SAC = 45°$



(B)

Zad 17. $y = (4m + 1)x - 19$ $y = (5m - 4)x + 20$ mają być równoległe czyli:
$4m + 1 = 5m - 4$ (współczynniki kierunkowe takie same)
$4m - 5m = -4 - 1$
$-m = -5$ $m = 5$ **(A)**

Zad 18. $S = (40;\ \ 40)$ $K = (0;\ \ 8)$ $L = (x;\ \ y)$
Korzystając ze wzoru na środek odcinka mamy: $40 = \frac{0+x}{2}$ $40 = \frac{8+y}{2}$
$\frac{1}{2}x = 40$ $x = 80$ $\frac{1}{2}y + 4 = 40$ $\frac{1}{2}y = 36$ $y = 72$
$L = (80;\ \ 72)$ **(D)**

Zad 19. $P = (-6;\ -8)$ Przekształcając ten punkt względem OX i potem względem OY to tak samo jakby przekształcić względem $(0;\ \ 0)$ i punkt $Q = (-x;\ -y) = (6;\ \ 8)$ **(A)**

Zad 20. $A = (1;\ \ 4)$ $B = (-5;\ -1)$ $C = (5;\ -3)$ $D = (6;\ -4)$ $P = (-30;\ -76)$.
Punkty leżą w tej samej ćwiartce jak ich współrzędne są tych samych znaków. Punkty B i P mają obie współrzędne ujemne czyli leżą w III ćwiartce.. **(B)**

Zad 21. Prostopadłościan ma wymiary: 30cm x 40cm x 120cm Policzmy przekątną podstawy
$30^2 + 40^2 = c^2$ $c^2 = 900 + 1600 = 2500$ $c = \sqrt{2500} = 50cm$
Teraz trzeba policzyć przekątną prostokąta o wymiarach 120cm x 50cm
$50^2 + 120^2 = c^2$ $c^2 = 2500 + 14400 = 16900$ $c = \sqrt{16900} = 130$
Widzimy że 3 odcinki są krótsze z wyjątkiem 131cm **(C)**

Zad 22. $r = 2$ dla stożka i kuli
$P_{kuli} = 4\pi r^2 = 4\pi 2^2 = 16\pi$ $P_{stożka} = 3 \cdot 16\pi = 48\pi$
$P_{stożka} = \pi r(r + l) = 48\pi$ wstawiając $r = 2$ i dzieląc przez π mamy:
$2(2 + l) = 48$ $4 + 2l = 48$ $2l = 44$ $l = 22$ **(D)**

Zad 23. $\frac{3+10+5+x+x+x+x+12+19+7}{10} = 12| \cdot 10$
$56 + 4x = 120$ $4x = 120 - 56$ $4x = 64|:4$ $x = 16$
Zbiór po uporządkowaniu ma postać: $\{3;\ \ 5;\ \ 7;\ \ 10;\ \ 12;\ \ 16;\ \ 16;\ \ 16;\ \ 16;\ \ 19\}$
Mediana to średnia liczby czwartej i piątej czyli średnia 12 i 16 co daje 14 **(A)**

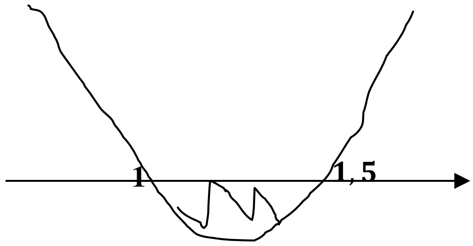
Zad 24. Mamy cyfry $\{1;\ \ 2;\ \ 3\}$ a liczba ma być parzysta i czterocyfrowa. Co oznacza że na końcu musi być 2. Treść zadania sugeruje że cyfry mogą się powtarzać bo cyfr jest tylko 3 a liczba czterocyfrowa. Mówiąc krótko liczba jest postaci $xyz2$ gdzie za niewiadome podstawiamy dowolną cyfrę z danego zbioru. Czyli mamy $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ **(D)**

Zad 25. Mamy 60 elementowy zbiór ludzi czyli $\overline{\overline{\Omega}} = 60$ Jeżeli kobiet jest 35 to mężczyzn 25
$\overline{\overline{A}} = 25 \quad P(A) = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$ **(D)**

<u>Zadania otwarte</u>

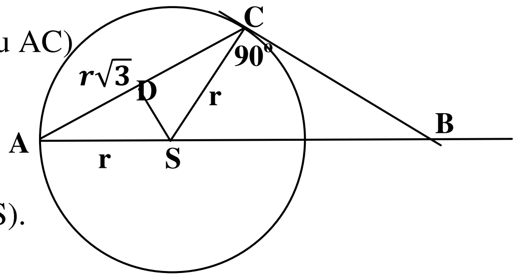
Zad 26. $(x^2 - 16)(x^3 - 1) = 0$
$(x-4)(x+4)(x^3-1) = 0$
$x - 4 = 0 \quad \vee \quad x + 4 = 0 \quad \vee \quad x^3 - 1 = 0$
$x_1 = 4 \quad \vee \quad x_2 = -4 \quad \vee \quad x_3 = \sqrt[3]{1} = 1$

Zad 27. $2x^2 - 5x + 3 \leq 0$
$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 \qquad \sqrt{1} = 1$
$x_1 = \frac{5-1}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1 \qquad x_2 = \frac{5+1}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} = 1{,}5$
Odp: $x \in \langle 1;\ \ 1{,}5 \rangle$



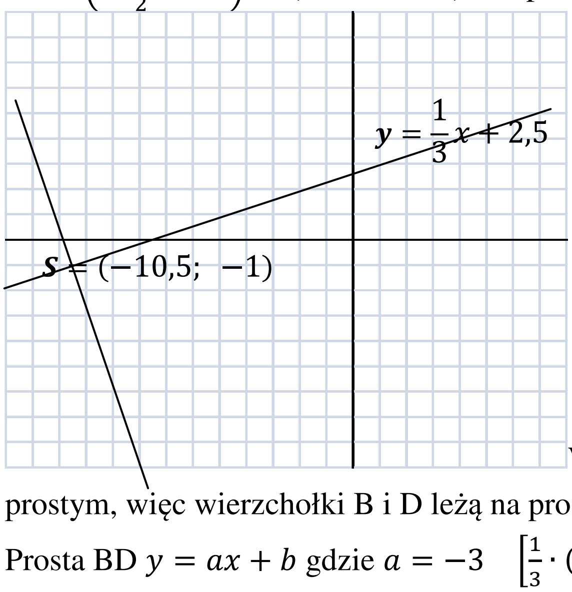
Zad 28. Wykazać że, dla $x \in R_+$ mamy $x + \frac{1-x}{x} \geq 1$
$x + \frac{1-x}{x} \geq 1 | \cdot x$ Można nierówność pomnożyć przez $\boldsymbol{x}$ gdyż $\boldsymbol{x}$ z założenia jest dodatni
$x^2 + 1 - x \geq x$
$x^2 - x - x + 1 \geq 0$
$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \qquad (x-1)^2 \geq 0$
Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby $\boldsymbol{x}$. Bo kwadrat jest zawsze liczba nieujemną.

Zad 29. Trójkąt ASC jest równoramienny |AS| = |SC| = r,
więc jego wysokość SD dzieli odcinek AC na połowy $CD = \frac{r\sqrt{3}}{2}$
Trójkąt SDC jest prostokątny (wysokość SD prostopadła do boku AC)
$\cos \sphericalangle DCS = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \alpha = 30°$
Trójkąt SBC jest prostokątny (styczna BC jest prostopadła do CS).
Szukany kąt ACB = 90° + 30° = 120°



Zad 30. Cyfra dziesiątek $a \in \{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$ oraz cyfra jedności $b \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8\}$
Są to zbiory 5cio elementowe. Czyli takich liczb dwucyfrowych jest $5 \cdot 5 = 25$
Wszystkich liczb dwucyfrowych jest $99 - 9 = 90$
Mamy więc $\overline{\overline{\Omega}} = 90 \quad \overline{\overline{A}} = 25$
$P(A) = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$
Odp: Prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi $\frac{5}{18}$

Zad 31. $S = \left(-\frac{21}{2};\ -1\right) = (-10{,}5;\ -1)$ na prostej $y = \frac{1}{3}x + 2{,}5$ leżą punkty A i C



Wiemy że przekątne w rombie przecinają się pod kątem prostym, więc wierzchołki B i D leżą na prostej prostopadłej do $y = \frac{1}{3}x + 2{,}5$.
Prosta BD $y = ax + b$ gdzie $a = -3 \quad \left[\frac{1}{3} \cdot (-3) = -1\right]$ i przechodzi przez $S = (-10{,}5;\ -1)$

Wstawiając punkt S do równani prostej mamy: $-1 = -3 \cdot (-10{,}5) + b$

$b = -1 - 31{,}5 = -32{,}5$

Odpowiedź: Prosta na której leżą punkty B i D ma wzór $y = -3x - 32{,}5$.

Zad 32. $S_n = \frac{2a_1+(n-1)r}{2}$ suma ciągu arytmetycznego.

W zadaniu mamy dwa ciągi arytmetyczne po 20 wyrazów:

W ciągu I pierwszy wyraz to a_1 i różnica wynosi $2r$

W ciągu II pierwszy wyraz to $a_1 + r$ i różnica wynosi $2r$ Mamy układ równań:

$\begin{cases} \frac{2a_1+19\cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1400 \\ \frac{2(a_1+r)+19\cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1340 \end{cases}$ czyli $\begin{cases} (2a_1 + 38r) \cdot 10 = 1400 \\ (2a_1 + 40r) \cdot 10 = 1340 \end{cases}$ dzieląc równania przez 10:

$\begin{cases} 2a_1 + 38r = 140 | :2 \\ 2a_1 + 40r = 134 | :2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a_1 + 19r = 70 | :2 \\ a_1 + 20r = 67 | :2 \end{cases}$ $\quad r = -3 \quad a_1 + 20 \cdot (-3) = 67$

$a_1 = 67 + 60 = 127 \qquad a_{40} = 127 + 39 \cdot (-3) = 127 - 117 = 10$

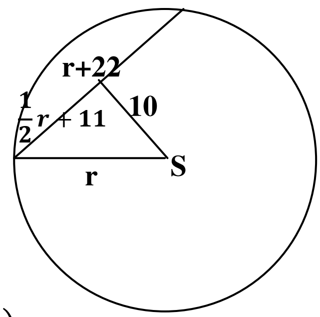
Odp: Ostatni wyraz $a_{40} = 10$

Zad 33. Zgodnie z warunkami zadania można narysować trójkąt prostokątny o wymiarach:

10; $\frac{1}{2}r + 11$ - przyprostokątne (odległość cięciwy od środka i połowa cięciwy)

r - przeciwprostokątna

Korzystając z Tw. Pitagorasa mamy:



$10^2 + \left(\frac{1}{2}r + 11\right)^2 = r^2$

$100 + \frac{1}{4}r^2 + 11r + 121 = r^2$

$-\frac{3}{4}r^2 + 11r + 221 = 0$

$\Delta = 11^2 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 221 = 121 + 663 = 784 \qquad \sqrt{784} = 28$

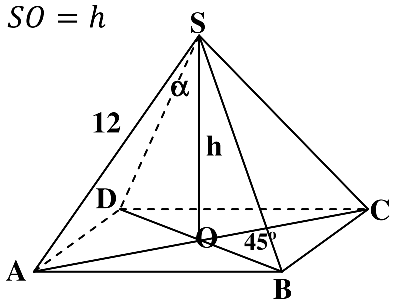
$r_1 = \frac{-11-28}{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{-39}{-\frac{3}{2}} = 39 \cdot \frac{2}{3} = 26; \qquad r_2 = \frac{-11+28}{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{17}{-\frac{3}{2}} = 17 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$ (liczba ujemna nie spełnia warunków zadania)

Odpowiedź: Promień okręgu ma długość $r = 26$

Zad 34. Korzystając z przekroju graniastosłupa ACC' mamy:

$\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{AO}{SO} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot SO = \sqrt{5} \cdot AO$ Przyjmując $SO = h$

mamy $2h = \sqrt{5} \cdot AO \quad \Rightarrow \quad AO = h \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2h}{\sqrt{5}}$



teraz stosując Tw. Pitagorasa do trójkąta AOS mamy:

$\left(\frac{2h}{\sqrt{5}}\right)^2 + h^2 = 12^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{4h^2}{5} + h^2 = 144$

$\frac{9}{5}h^2 = 144 | :\frac{9}{5} \qquad h^2 = \frac{144\cdot 5}{9} = 16 \cdot 5$

$h = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$

$AO = \frac{2h}{\sqrt{5}} = \frac{2\cdot 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 8$ - jest to połowa przekątnej podstawy (kwadratu)

$AC = 2 \cdot 8 = 16$ - przekątna podstawy.

$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{16\cdot 16}{2} \cdot 4\sqrt{5} = \frac{256\cdot 2\sqrt{5}}{3} = \frac{516\sqrt{5}}{3}$

Odpowiedź: Objętośc tego ostrosłupa wynosi $\frac{516\sqrt{5}}{3}$