Matura II termin czerwiec 2019r

Zadania zamknięte

Zad 1. $\frac{(x^2-2x-3)(x^2-9)}{x-1}=0$ Tu nic nie trzeba rozwiązywać tylko zauważyć że dla $x=1$ mianownik wynosi zero $(1-1=0)$, więc ta liczba jeśli nawet jest rozwiązaniem licznika to nie może być rozwiązaniem całego równania. **(C)**

Zad 2. $\frac{\log_3 27}{\log_3 \sqrt{27}}=\frac{\log_3 27}{\log_3 27^{\frac{1}{2}}}=\frac{\log_3 27}{\frac{1}{2}\log_3 27}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ **(B)**

Zad 3. $(x-6)(x-2)^2(x+4)(x+10)>0$ Trzeba ustalić dla której z podanych liczb, jest parzysta ilość nawiasów dających wartość ujemną. Dla $x=-5$ $(x-6)<0$ $(x+4)<0$ **(A)**

Zad 4. $a=\frac{x}{y}$ $b=\frac{\frac{1}{2}x}{1\frac{1}{2}y}=\left(\frac{1}{2}:1\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{x}{y}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{x}{y}=\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{y}=\frac{1}{3}a$ **(B)**

Zad 5. $f(x)=(a+1)x+11$ $x=\frac{3}{4}$ – miejsce zerowe

$(a+1)\frac{3}{4}+11=0$ $\frac{3}{4}a=-11-\frac{3}{4}|\cdot\frac{4}{3}$

$a=-\frac{47}{4}\cdot\frac{4}{3}=-\frac{47}{3}$ **(C)**

Zad 6. $f(x)=\left(m\sqrt{5}-1\right)x+3$ ma być rosnąca więc $m\sqrt{5}-1>0$

$m\sqrt{5}>1|:\sqrt{5}$ $m>\frac{1}{\sqrt{5}}$ **(A)**

Zad 7. $\begin{cases}2x-y=2\\ \mathrm{x}+\mathrm{my}=1\end{cases}$ ma mieć nieskończenie wiele rozwiązań czyli równania mają być takie same, więc jak drugie równanie pomnożymy przez 2 to otrzymamy $2x+2my=2$ czyli:

$2m=-1|:2$ $m=-\frac{1}{2}$ **(D)**

Zad 8. Równanie $f(x)=-1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań bo chociażby odcinek BC ma nieskończenie wiele punktów. **(D)**

Zad 9. $a_2+a_9=a_4+a_k$ wystarczy wykonać obliczenie $2+9=4+k$ $\Rightarrow$ $k=11-4$

$k=7$ **(B)**

Zad 10. $a_{n+3}=-2\cdot 3^{n+1}$ wystarczy wykonać obliczenia dla n = 2

$a_{2+3}=-2\cdot 3^{2+1}$ $a_5=-2\cdot 3^3=-2\cdot 27=-54$ **(A)**

Zad 11. $(3x-2)^2-(2x-3)(2x+3)=9x^2-12x+4-(4x^2-9)=9x^2-12x+4-4x^2+9=$ $5x^2-12x+13$ **(C)**

Zad 12. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{3}{8}$

$(\cos\alpha-\sin\alpha)^2+2=\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha+2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)+2=$

$1+\frac{6}{8}+2=3+\frac{3}{4}=\frac{12+3}{4}=\frac{15}{4}$ **(A)**

Zad 13. $2\sin^2 18°+\sin^2 72°+\cos^2 18°=2\sin^2 18°+\cos^2 18°+\cos^2 18°=$

$=2\sin^2 18°+2\cos^2 18°=2(\sin^2 18°+\cos^2 18°)=2\cdot 1=2$ **(C)**

Zad 14. Trójkąt BSC równoramienny więc

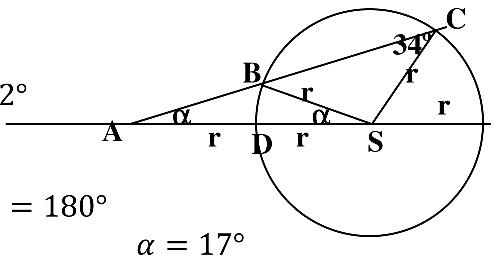
$\sphericalangle SBC=34°$

$\sphericalangle BSC=180°-2\cdot 34°=180°-68°=112°$

Trójkąt ASB równoramienny

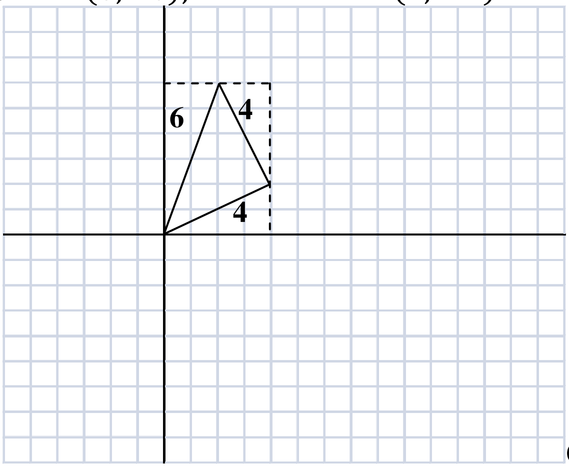
$\sphericalangle BAD=\sphericalangle BSD=\alpha$

W trójkącie ASC mamy: $\alpha+\alpha+112°+34°=180°$



$2\alpha+146°=180°$ $2\alpha=34°|:2$ $\alpha=17°$ **(B)**

Zad 15. $A = (0;\ \ 0);$ $\qquad$ $B = (4;\ \ 2)$ $\qquad$ $C = (2;\ \ 6)$

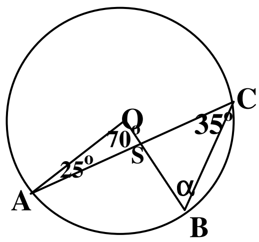


Obliczamy pole prostokąta jak na rysunku $6 \cdot 4 = 24$

Następnie od obliczonego pola prostokąta odejmujemy pola trójkątów które łatwo policzyć:

$24 - (4 + 4 + 6) = 24 - 14 = 10$ **(B)**

Zad 16. $\sphericalangle AOC$ środkowy a $\sphericalangle ACB$ wpisany oparty na tym samym łuku,



więc $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \cdot 70° = 35°$

Odcinki AC i BO przecinają się w punkcie S.

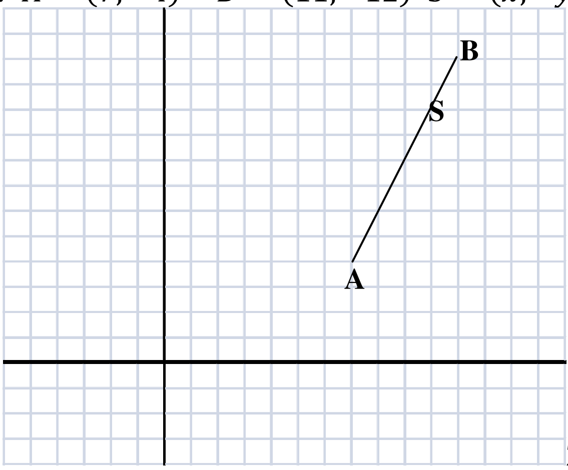
$\sphericalangle ASO = 180° - (25° + 70°) = 180° - 95° = 85°$

$\sphericalangle BSC$ jako wierzchołkowy z $\sphericalangle ASO$ ma też 85°

Teraz w trójkącie BSC mamy: $85° + 35° + \alpha = 180°$

$\alpha = 180° - 120° = 60°$ **(B)**

Zad 17. $A = (7;\ \ 4)$ $\quad$ $B = (11;\ \ 12)$ $\quad$ $S = (x;\ \ y)$ $\quad$ $|AS| = 3|BS|$



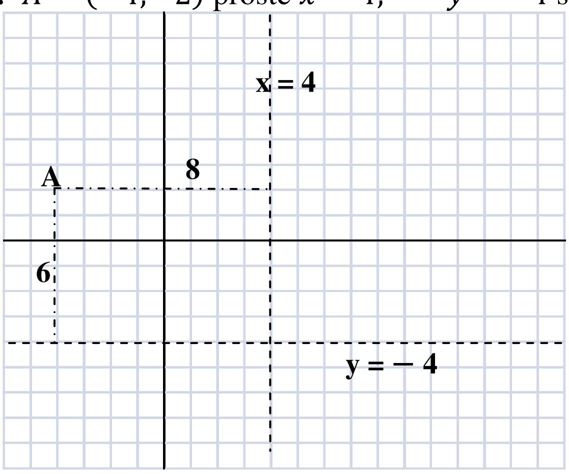
Z rysunku widać że $S = (10;\ \ 10)$

Zadanie można łatwo wyliczyć znając działania na wektorach $\overrightarrow{AB} = [11 - 7;\ \ 12 - 4] = [4;\ \ 8]$

$\overrightarrow{SB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}[4;\ \ 8] = [1;\ \ 2]$ $\qquad$ $11 - x = 1$ $\qquad$ $x = 10$ $\qquad$ $12 - y = 2$ $\qquad$ $y = 10$

$S = (10;\ \ 10)$ **(C)**

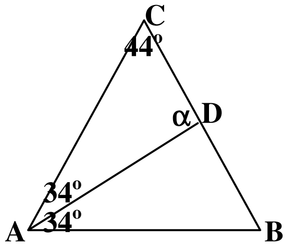
Zad 18. $A = (-4;\ \ 2)$ proste $x = 4;$ $\qquad$ $y = -4$ suma odległości punktu A od prostych to 8 + 6 = 14



(A)

Zad 19. Sześcian ma 12 krawędzi to: $a = 96 : 12 = 8cm$ - krawędź sześcianu.
$P_{pc} = 6a^2 = 6 \cdot 8^2 = 6 \cdot 64 = 384cm^2$ **(C)**

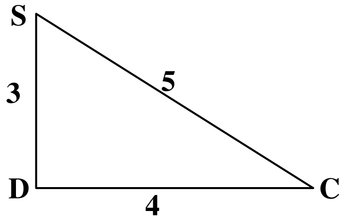
Zad 20. $\sphericalangle CAB = (180° - 44°) : 2 = 136° : 2 = 68°$
$\sphericalangle CAD = 68° : 2 = 34°$
$\sphericalangle \alpha = 180° - (44° + 34°) = 180° - 78° = 102°$



(D)

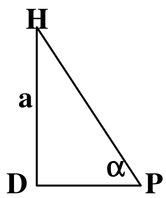
Zad 21. Można liczyć na piechotę. Albo skorzystać z ciągu arytmetycznego $a_1 = 12$ $r = 6$ $a_n = 96$.
$a_n = a_1 + (n-1)r$ $\qquad 96 = 12 + (n-1)6$
$96 = 12 + 6n - 6 \quad \Longrightarrow \quad 96 = 6n + 6 \quad \Longrightarrow \quad 6n = 90 | : 6 \quad \Longrightarrow \quad n = 15$ **(D)**

Zad 22. Ściana CDS jest trójkątem prostokątnym więc |CS| = 5
Ściana BCS też jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych |BC| = 4 i |CS| = 5 tak więc pole trójkąta BCS można policzyć:
$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$



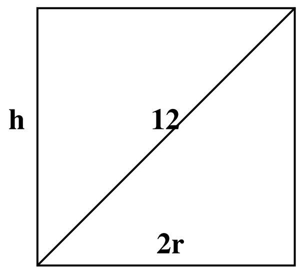
(B)

Zad 23. Interesuje nas trójkąt prostokątny DPH o wymiarach jak na rysunku:
$DH = a$ krawędź sześcianu
$DP = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$ - połowa przekątnej kwadratu
$\tan \alpha = \frac{a}{\frac{1}{2}a\sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$



(D)

Zad 24. $h\sqrt{2} = 12 \qquad h = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$
$2r = 6\sqrt{2} | : 2 \qquad r = 3\sqrt{2}$
$V = \pi r^2 h = \pi(3\sqrt{2})^2 \cdot 6\sqrt{2} = 9 \cdot 2 \cdot 6\sqrt{2}\pi = 108\sqrt{2}\pi$

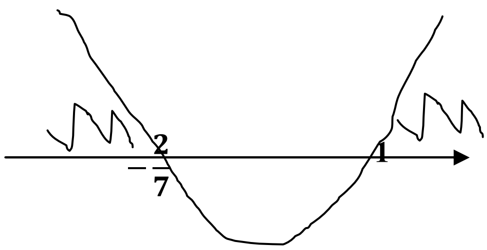


(B)

Zad 25. $\Omega = \{20; 21; \cdots 40\} \qquad \overline{\overline{\Omega}} = 40 - 19 = 21$
$A = \{20;\ 24;\ 28;\ 32;\ 36;\ 40\} \qquad \overline{\overline{A}} = 6$
$P(A) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ **(B)**

<u>Zadania otwarte</u>

Zad 26. $x(7x + 2) > 7x + 2$
$7x^2 + 2x > 7x + 2$
$7x^2 + 2x - 7x - 2 > 0$
$7x^2 - 5x - 2 > 0$
$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-2) = 25 + 56 = 81 \qquad \sqrt{81} = 9$
$x_1 = \frac{5-9}{2 \cdot 7} = \frac{-4}{14} = -\frac{2}{7} \qquad x_2 = \frac{5+9}{2 \cdot 7} = \frac{14}{14} = 1$



Odp: $x \in \left(-\infty;\ -\frac{2}{7}\right) \cup (1;\ \infty)$

Zad 27. $\frac{3x^2-8x-3}{x-3} = x - 3 \qquad x \neq 3$
$\frac{3x^2-8x-3}{x-3} - (x - 3) = 0$
$\frac{3x^2-8x-3}{x-3} - \frac{(x-3)(x-3)}{x-3} = 0$

$\frac{3x^2-8x-3}{x-3}-\frac{x^2-6x+9}{x-3}=0$ $\qquad$ $\frac{3x^2-8x-3-(x^2-6x+9)}{x-3}=0$

$\frac{3x^2-8x-3-x^2+6x-9}{x-3}=0$ $\qquad$ $\frac{2x^2-2x-12}{x-3}=0$

$2x^2-2x-12=0|:2$

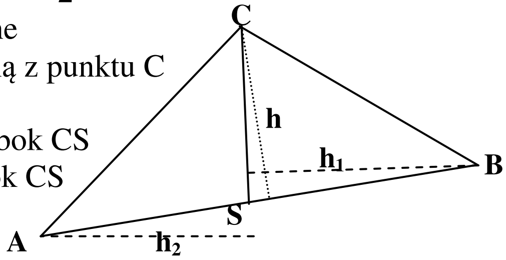
$x^2-x-6=0|:2$

$\Delta=(-1)^2-4\cdot(-6)=1+24=25$ $\qquad$ $\sqrt{25}=5$

$x_1=\frac{1-5}{2}=-\frac{4}{2}=-2$ $\qquad$ $x_2=\frac{1+5}{2}=\frac{6}{2}=3$ - nie należy do dziedziny!

Odpowiedź Jedyną liczbą spełniającą to równanie jest $x=-2$

Zad 28. Jeżeli |AS| = |BS| to pola trójkątów ASC i BSC są równe gdyż trójkąty te mają wspólną wysokość h poprowadzoną z punktu C na bok AB.



Teraz korzystając z faktu że mają równe pola i wspólny bok CS muszą mieć też takie same wysokości opuszczone na bok CS czyli odległości punktów A i B od prostej SC.

$h_1=h_2$

Zad 29. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ lewą stronę sprowadzamy do wspólnego mianownika

$\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}\geq\frac{4}{a+b}$

$\frac{a+b}{ab}\geq\frac{4}{a+b}$ Czyli $(a+b)(a+b)\geq 4ab$

$(a+b)^2\geq 4ab$

$a^2+2ab+b^2\geq 4ab$ po przeniesieniu $4ab$ na lewą stronę otrzymujemy:

$a^2-2ab+b^2\geq 0$ czyli: $(a-b)^2\geq 0$ a ta nierówność jest oczywista dla dowolnej $a;\ b\in R$ gdyż kwadrat każdej liczby jest nieujemny.

Zad 30. Ciąg geometryczny $S_1=2$ oraz $S_2=12$ trzeba wiedzieć że $S_1=a_1$, a $S_2=a_1+a_2$.

Stąd mamy $a_1=2$ $\qquad$ $a_2=12-2=10$ $\qquad$ $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{10}{2}=5$

$a_5=a_1\cdot q^4=2\cdot 5^4=2\cdot 625=1250$

Zad 31. Trzykrotny rzut kostką więc$\overline{\overline{\Omega}}=6\cdot 6\cdot 6=216$ $\quad$ $\Omega=\{111;\ \cdots;\ 666\}$

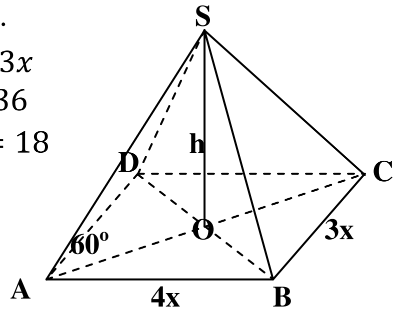
$A=\{664;\ 646;\ 466;\ 655;\ 565;\ 556\}$ $\overline{\overline{A}}=6$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wynosi $P(A)=\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$.

Zad 32. Podstawa będąca prostokątem ma wymiary: $a=4x;\ \ b=3x$

$4x\cdot 3x=432$ $\qquad$ $12x^2=432|:12$ $\qquad$ $x^2=36$

$x=\sqrt{26}=6$ $\qquad$ $4x=4\cdot 6=24$ $\qquad$ $3x=3\cdot 6=18$



Obliczymy długość przekątnej tego prostokąta AC

$18^2+24^2=c^2$

$c^2=324+576=900$ $\qquad$ $c=\sqrt{900}=30=AC$

$AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\cdot 30=15$

Korzystając z trójkąta prostokątnego AOS mamy:

$\tan 60°=\frac{h}{15}$ $\qquad$ $\sqrt{3}=\frac{h}{15}|\cdot 15$ $\qquad$ $h=15\sqrt{3}$

$V=\frac{1}{3}P_p\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 432\cdot 15\sqrt{3}=144\cdot 15\sqrt{3}=2160\sqrt{3}$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa wynosi $2160\sqrt{3}$

Zad 33. $2x+z=1$ $\qquad\Rightarrow\qquad$ $z=-2x+1$

$x^2+z^2+7xz=x^2+(-2x+1)^2+7x(-2x+1)=x^2+4x^2-4x+1-14x^2+7x=$
$-9x^2+3x+1$

Otrzymane wyrażenie traktujemy jako wzór na funkcję kwadratową i obliczymy współrzędne wierzchołka tej funkcji:

$f(x)=-9x^2+3x+1$ Współrzędne wierzchołka $(p;\ \ q)=\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a}\right)=\left(p;\ \ f(p)\right)$

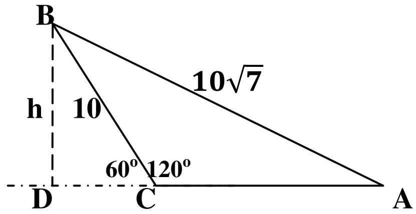
$p=-\frac{3}{2\cdot(-9)}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$ $\qquad$ $f\left(\frac{1}{6}\right)=-9\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2+3\cdot\frac{1}{6}+1=-\frac{9}{36}+\frac{3}{6}+1=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=1\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

Dla $x = \frac{1}{6}$ $\quad z = -2 \cdot \frac{1}{6} + 1 = -\frac{2}{6} + 1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Odpowiedź: Dla $x = \frac{1}{6}$ $\quad y = \frac{2}{3}$ mamy wartość wyrażenia $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

Zad 34. Prowadzimy wysokość z wierzchołka B na bok AC i na przedłużeniu boku AC powstaje punkt D.

$\sphericalangle DCB = 180° - 120° = 60°$



$\sin 60° = \frac{h}{10}$ $\qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{10}$ $\qquad 2h = 10\sqrt{3}$

$h = 5\sqrt{3}$

Korzystając z faktu że trójkąt ADB jest prostokątny
oraz przyjmując AD = b mamy:

$\left(5\sqrt{3}\right)^2 + b^2 = \left(10\sqrt{7}\right)^2$

$25 \cdot 3 + b^2 = 100 \cdot 7$ $\qquad b^2 = 700 - 75 = 625$:

$b = \sqrt{625} = 25$

Teraz aby obliczyć długość odcinka CD skorzystamy funkcji cosinus

$\cos 60° = \frac{CD}{10}$ $\qquad \frac{1}{2} = \frac{CD}{10}$ $\qquad 2CD = 10$ $\qquad CD = 5$

$AC = AD - CD = 25 - 5 = 20$

Odpowiedź: długość boku AC wynosi 20.