Matura z matematyki poziom rozszerzony maj 2019r

Zadania zamknięte

Zad 1. $\left(\log_{\frac{1}{x}} y\right) \cdot \left(\log_{\frac{1}{y}} x\right) = (-\log_x y) \cdot \left(-\log_y x\right) = (\log_x y) \cdot \left(\log_y x\right)$

Najłatwiej przyjąć np.: $x = 2 \quad y = 8$ to mamy $(\log_2 8) \cdot (\log_8 2) = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ **(D)**

Zad 2. $\cos^2 105° - \sin^2 105° = \cos(2 \cdot 105°) = \cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(A)**

Zad 3. Wystarczy zająć się punktem $B = (1;\ 2)$ i jego obrazem względem OX czyli $B' = (1;\ -2)$.
Widać wyraźnie że łamana przechodząca przez DAB'CE to wykres $f(x) = |x|$ przesunięty o wektor $[1;\ -2]$ czyli wzór na tą łamaną to $f(x) = |x - 1| - 2$
Ostatecznie aby z B' otrzymać B mamy $f(x) = \big||x - 1| - 2\big|$ **(B)**

Zad 4. Jeżeli $P(B') = \frac{1}{4}$ to $P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ Mamy dane: $P(A|_B) = \frac{1}{5}$
Wzór na prawdopodobieństwo warunkowe to $P(A|_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(P)}$ Oznaczmy $P(A \cap B) = x$
$\frac{1}{5} = \frac{x}{\frac{3}{4}}$ czyli $x = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$ **(C)**

Zadania otwarte

Zad 5. Korzystając z twierdzenia: Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$ to $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$
$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{9n^3+11n^2}{7n^3+5n^2+3n+1} - \frac{n^2}{3n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{9n^3+11n^2}{7n^3+5n^2+3n+1} - \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2+1} = \frac{9}{7} - \frac{1}{3} = \frac{27}{21} - \frac{7}{21} = \frac{20}{21}$
$\frac{20}{21} \approx 0{,}95238$
Odpowiedź: Cyfry po przecinku do wpisania w odpowiedzi to 952

Zad 6. Mamy cyfry: $\{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$ W liczbie pięciocyfrowej te cyfry mają się nie powtarzać więc jeśliby chodziło o ilość takich liczb to by było $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
Warto zauważyć że konkretna cyfra na konkretnym miejscu jest $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ razy.
Wartość liczby pięciocyfrowej można zapisać tak $a \cdot 10000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e$
Tak więc jeśli chodzi o sumę wszystkich tych cyfr to każda cyfra na każdym miejscu jest po 24 co daje że po zsumowaniu moje symboliczne a, b, c, d, e mają tą samą wartość. Przyda się też fakt że: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$.
Mamy więc $S = 24 \cdot 25 \cdot (10000 + 1000 + 100 + 10 + 1) = 600 \cdot 11111 = 6666600$

Zad 7. $P = (10;\ \ 2429) \qquad y = 2x^2 + x + 2219$ prosta $y = ax + b$ jest styczna w P
$y' = 4x + 1$ - pochodna danej funkcji kwadratowej
$f'(10) = 4 \cdot 10 + 1 = 41 \qquad a = 41$ - współczynnik kierunkowy stycznej w punkcje $x = 10$
styczna ma postać $y = 41x + b$ i przechodzi przez $P = (10;\ \ 2429)$
$2429 = 41 \cdot 10 + b \quad \Longrightarrow \quad 2429 = 410 + b \quad \Longrightarrow \quad b = 2019$

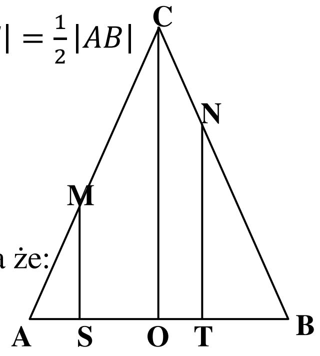
Zad 8. Dla dowolnych liczb dodatnich, jeżeli $x < y \quad a -$ dowolne to $\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2$
Na początek udowodnimy że dla dodatnich $x < y \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$
$\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} > 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2+y^2}{xy} > 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2+y^2}{xy} - 2 > 0$
$\frac{x^2+y^2}{xy} - \frac{2xy}{xy} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2-2xy+y^2}{xy} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{(x-y)^2}{xy} > 0$
A ta ostatnia nierówność jest prawdziwa dla tak określonych x i y, gdyż mianownik jest dodatni a w liczniku mamy kwadrat liczby różnej od zera.
Teraz wystarczy zauważyć że $\frac{x+a}{y+a} > \frac{x}{y}$. To przy takich założeniach jest oczywiste bo:
$(x + a)y > (y + a)x$

$xy + ay > xy + ax$

$ay > ax$ bo $y > x$ zgodnie z założeniem

Zad 9.

Trójkąt ABC równoramienny. Wykazać że jeżeli |AM| = |CN| to $|ST| = \frac{1}{2}|AB|$



Prowadzimy wysokość CO. Trójkąty ACO i BCO są przystające bo trójkąt ABC równoramienny. Trójkąty ACO i AMS podobne bo prostokątne i mają wspólny kąt przy wierzchołku A.

Analogicznie trójkąty BOC i BTN też podobne

Tak więc z faktu podobieństwa trójkatów ASM, AOC i BNT wynika że:

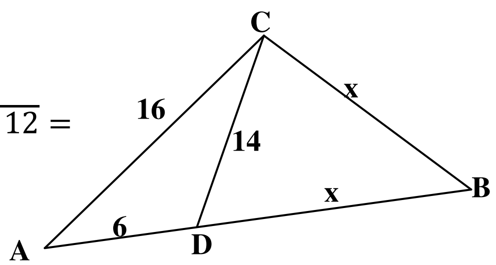
jeżeli |AM| = |CN| i |MC| = |NB| to |AS| = |OT| i |SO| = |TB|

oczywiste że $|\mathrm{AS}| + |\mathrm{SO}| = |\mathrm{OT}| + |\mathrm{TB}| = \frac{1}{2}|AB|$ bo trójkąt równoramienny ABC

mamy więc ostatecznie jeżeli $|\mathrm{AS}| + |\mathrm{SO}| = \frac{1}{2}|AB|$ oraz $|AS| = |OT|$ to ostatecznie

$|SO| + |OT| = |ST| = \frac{1}{2}|AB|$ koniec dowodu.

Zad 10. Ze wzoru Herona można obliczyć pole trójkąta ADC



$p = \frac{16+14+6}{2} = \frac{36}{2} = 18$ połowa obwodu

$P_1 = \sqrt{18(18-16)(18-14)(18-6)} = \sqrt{18 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 12} =$

$\sqrt{9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{9 \cdot 64 \cdot 3} = 3 \cdot 8 \cdot \sqrt{3} = 24\sqrt{3}$

To samo pole można policzyć ze wzoru:

$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$

co daje szansę na obliczenie kąta przy wierzchołku A

$24\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6 \cdot \sin\alpha$

$24\sqrt{3} = 48 \cdot \sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{24\sqrt{3}}{48} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \alpha = 60°$

Teraz zapisując twierdzenie cosinusów dla trójkąta ABC (***a dokładnie używając obliczonego kąta 60°***) mamy:

$x^2 = 16^2 + (x+6)^2 - 2 \cdot 16 \cdot (x+6)\cos 60°$

$x^2 = 256 + x^2 + 12x + 36 - 32 \cdot (x+6) \cdot \frac{1}{2}$

$x^2 = 256 + x^2 + 12x + 36 - 16x - 96$

$4x = 196 |: 4 \qquad x = 49$

Obwód wynosi: $16 + 49 + 6 + 49 = 120$

Zad 11. $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$ przekształćmy do postaci kanonicznej

$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 8y + 16 - 9 = 0$

$(x-6)^2 + (y-4)^2 = 9$

$(x-6)^2 + (y-4)^2 = 3^2$ Mamy okrąg o środku $S_1 = (6;\ \ 4)$ i promieniu $r_1 = 3$

$x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0$ przekształćmy do postaci kanonicznej

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + 4y + 4 - 4 - 77 = 0$

$(x-a)^2 + (y+2)^2 = 81$

$(x-a)^2 + (y+2)^2 = 9^2$ Mamy okrąg o środku $S_2 = (a;\ -2)$ i promieniu $r_2 = 9$

I. Okręgi mogą być styczne zewnętrznie czyli odległość między środkami wynosi:

$r_1 + r_2 = 3 + 9 = 12$

Środek okręgu pierwszego leży w punkcie $S_1 = (6;\ \ 4)$ a środek okręgu drugiego w odległości 12 od niego czyli na okręgu o wzorze $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 12^2$ dodatkowo wiadomo że leży on w punkcie $S_2 = (a;\ -2)$ czyli na prostej o równaniu $y = -2$. Trzeba więc rozwiązać układ równań:

$\begin{cases}(x-6)^2+(y-4)^2=12^2\\ y=-2\end{cases}$ Wstawiając $y=-2$ do I równania mamy:

$x^2-12x+36+(-6)^2=144$

$x^2-12x+36+36=144$

$x^2-12x-72=0$

$\Delta=(-12)^2-4\cdot1\cdot(-72)=144+288=432$ $\sqrt{432}=\sqrt{144\cdot3}=12\sqrt{3}$

$x_1=\frac{12-12\sqrt{3}}{2}=6-6\sqrt{3}$ $x_2=\frac{12+12\sqrt{3}}{2}=6+6\sqrt{3}$

Mamy więc $a_1=6-6\sqrt{3}$ $a_2=6+6\sqrt{3}$

II. Okręgi te mogą być styczne wewnętrznie wtedy odległość między środkami wynosi:

$r_2-r_1=9-3=6$ Teraz więc rozwiążemy układ równań

$\begin{cases}(x-6)^2+(y-4)^2=6^2\\ y=-2\end{cases}$ Wstawiając $y=-2$ do I równania mamy:

$x^2-12x+36+(-6)^2=36$

$x^2-12x+36=0$

$\Delta=(-12)^2-4\cdot1\cdot36=144-144=0$

$x=\frac{12}{2}=6$

Trzecie rozwiązanie $a_3=6$

Zad 12. Ciąg $(a;\ b;\ c)$ arytmetyczny, czyli ma postać $(a;\quad a+r;\quad a+2r)$

Ciąg $\left(\frac{1}{a};\ \frac{2}{3b};\quad \frac{1}{2a+2b+c}\right)$ geometryczny. Po uwzględnieniu że pierwszy arytmetyczny mamy:

$\left(\frac{1}{a};\quad \frac{2}{3(a+r)};\quad \frac{1}{2a+2(a+r)+a+3r}\right)=\left(\frac{1}{a};\ \frac{2}{3a+3r};\ \frac{1}{2a+2a+2r+a+3r}\right)=\left(\frac{1}{a};\ \frac{2}{3a+3r};\ \frac{1}{5a+5r}\right)$

$q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{1}{5a+5r}}{\frac{2}{3a+3r}}=\frac{1}{5a+5r}\cdot\frac{3a+3r}{2}=\frac{3(a+r)}{10(a+r)}=\frac{3}{10}$

Zad 13. $W(x)=2x^3+(m^3+2)x^2-11x-2(2m+1)$ dzieli się przez $(x-2)$ a przy dzieleniu przez $(x+1)$ daje resztę 6

Oznacza to że dla $x=2$ $W(x)=0$ a dla $x=-1$ $W(x)=6$

I) Mamy więc dla $x=2$

$W(2)=2\cdot2^3+(m^3+2)2^2-11\cdot2-2(2m+1)=0$

$16+4(m^3+2)-22-4m-2=0$

$4(m^3+2)-4m-8=0$

$4m^3-4m=0$

$4m(m^2-1)=0$

$4m(m-1)(m+1)=0$

$4m=0 \quad \vee \quad m-1=0 \quad \vee \quad m+1=0$

$m_1=0 \quad \vee \quad m_2=1 \quad \vee \quad m_3=-1$

II) Natomiast dla $x=-1$ mamy

$W(-1)=2(-1)^3+(m^3+2)(-1)^2-11\cdot(-1)-2(2m+1)=6$

$-2+1(m^3+2)+11-4m-2=6$

$m^3+2-4m+7=6$

$m^3-4m+3=0$

$\Delta=(-4)^2-4\cdot3=16-12=4$ $\sqrt{4}=2$

$m_1=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}=1$ $m_2=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3$

Uwzględniając I oraz II mamy rozwiązanie $m=1$

Podstawiając $m=1$ otrzymujemy wielomian:

$W(x)=2x^3+(1^3+2)x^2-11x-2(2\cdot1+1)$

$W(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$

$2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 \leq 0$

Widzimy że dla $x = 2$

$W(2) = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 - 6 = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 - 22 - 6 = 16 + 12 - 28 = 28 - 28 = 0$

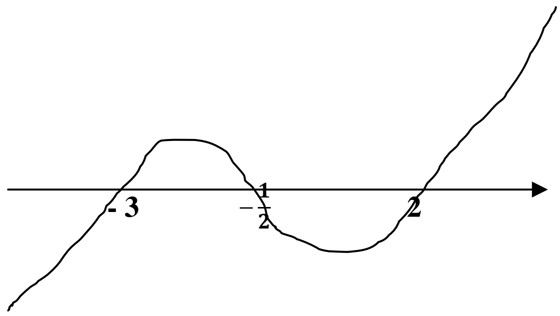
mamy więc $x_1 = 2$

$$\left(\begin{array}{r} \underline{\quad 2x^2 + 7x + 3 \quad} \\ 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 \\ \underline{-2x^3 + 4x^2 \qquad\qquad} \\ = \quad 7x^2 - 11x \qquad \\ \underline{-7x^2 + 14x \qquad} \\ 3x - 6 \qquad \\ -3x + 6 \qquad \end{array}\right) : (x - 2)$$

Teraz rozwiązując $2x^2 + 7x + 3 = 0$ mamy:

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25$ $\qquad \sqrt{25} = 5$

$x_2 = \frac{-7-5}{2 \cdot 2} = \frac{-12}{4} = -3$ $\qquad x_3 = \frac{-7+5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$



Odpowiedź: $x \in \left(-\infty; \ -3\right\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{2}; \ \ 2\right\rangle$

Zad 14. $(\cos x)\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\sin x$

$(\cos x)\left(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{3} + \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin x$

wiedząc że $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ mamy: $(\cos x)\left(2\sin x \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin x$

$(\cos x)(\sin x) = \frac{1}{2}\sin x \mid \cdot 2$

$2(\cos x)(\sin x) = \sin x$

$2(\cos x)(\sin x) - \sin x = 0$

$\sin x\,(2\cos x - 1) = 0$ $\qquad \sin x = 0 \quad \vee \quad 2\cos x - 1 = 0$

$\sin x = 0 \qquad x_1 = 0 + k\pi$

$2\cos x - 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2\cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

Zad 15. $V = 2$ $\qquad V = \frac{1}{2}a \cdot h \cdot H = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$

gdzie a – krawędź podstawy; h – wysokość podstawy H – wysokość graniastosłupa

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad H = 2 \cdot \frac{4}{a^2\sqrt{3}} = \frac{8}{a^2\sqrt{3}}$

$P_{pc} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$ - pole powierzchni całkowitej

$P_{pc} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a\frac{8}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{24a}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{24}{a\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{a}$

$P(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{a}$ Pole powierzchni całkowitej jako funkcja zmiennej ***a***.

$P'(a) = \frac{2a\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{8\sqrt{3}}{a^2}\right) = a\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{a^2}$

Dla jakiego a funkcja posiada ekstremum

$a\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{a^2} = 0 \mid \cdot a^2 \qquad a \neq 0$

$a^3\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 0 \mid : \sqrt{3}$

$a^3 = 8 \qquad a = 2$

jest to minimum bo wartość pochodnej czyli wartość wyrażenia $a\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{3}}{a^2}$ dla $a<2$ jest ujemna a dla $a>2$ jest dodatnia.

Krawędzie graniastosłupa to: $a=2$ - krawędź podstawy

$b=H=\frac{8}{a^2\sqrt{3}}=\frac{8}{2^2\sqrt{3}}=\frac{8}{4\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ - krawędź boczna

$P_{pc}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+\frac{8\sqrt{3}}{a}=\frac{2^2\sqrt{3}}{2}+\frac{8\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}$ - pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.