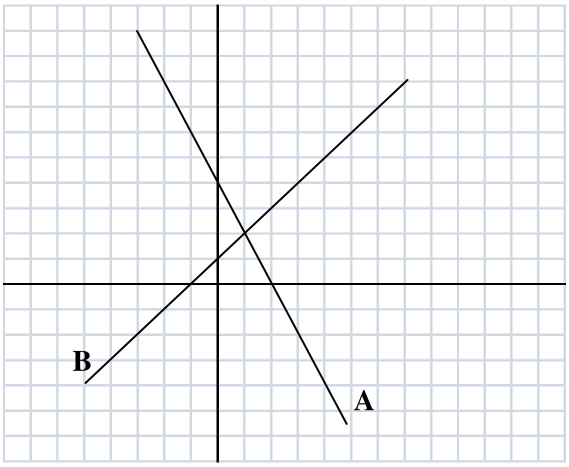
Maj 2014r Poziom podstawowy

Zadania zamknięte

Zad 1.



Prosta A przechodzi przez 4 na osi Y więc b = 4 jest też wykresem funkcji malejącej więc wybierając odpowiedzi mamy $y = -2x + 4$

Prosta B przechodzi przez 1 na osi Y więc b = 1 i jest wykresem funkcji rosnącej więc do wyboru mamy tylko $y = x + 1$ **(A)**

Zad 2. $c + 50\%c = 78 \quad \Longrightarrow \quad c + \frac{1}{2}c = 78 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{2}c = 78| \cdot 2$

$3c = 156 \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{156}{3} = 52$ **(B)**

Zad 3. $\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} - \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}+2-(2\sqrt{3}-2)}{3-1} = \frac{2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$ **(C)**

Zad 4. $\log_8 16 + 1 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$ **(D)**

Zad 5. $(x^2-1)(x-10)(x-5) = 0$ oraz $\frac{2x-10}{x-1} = 0$ Widzimy że drugie równanie ma tylko rozwiązanie $2x - 10 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x = 10 \quad \Longrightarrow \quad x = 5$ a w pierwszym mamy $(x-5) = 0$ **(C)**

Zad 6. $f(x) = (m^2-4)x + 2$ ma być malejąca czyli $m^2 - 4 < 0$ $m \in (-2;\ \ 2)$ **(B)**

Zad 7. Z wykresu widać że funkcja ma miejsca zerowe $x_1 = -1 \quad x_2 = 3$ gałęzie zwrócone do dołu więc minus przed wzorem $f(x) = -(x-x_1)(x-x_2) = -(x+1)(x-3)$ **(D)**

Zad 8. Jeżeli podstawa AB zawarta w $y = 2x - 4$ to podstawa CD jako równoległa do AB musi być zawarta w prostej $y = 2x + 2$. Ten sam współczynnik kierunkowy **(D)**

Zad 9. $\frac{|x+3|-x+3}{x} \quad dla\ -3 < x < 0$

dla takich $\boldsymbol{x}$ $(x+3) > 0$ czyli $|x+3| = x + 3$ tak więc $\frac{|x+3|-x+3}{x} = \frac{x+3-x+3}{x} = \frac{6}{x}$ **(D)**

Zad 10. $2(x+2)(x-2) = 0$ pierwiastkami są $x_1 = -2 \quad x_2 = 2$

$\frac{1}{-2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ **(B)**

Zad 11. $\{2;\ -1;\ -4\}$ ciąg arytmetyczny, czyli $r = -1 - 2 = -3$

$a_n = a_1 + (n-1)r = 2 + (n-1)(-3) = 2 - 3n + 3 = -3n + 5$ **(A)**

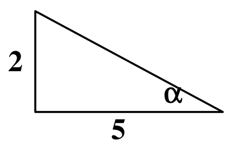
Zad 12. $\frac{P_2}{P_1} = k^2$ czyli: $\frac{50cm^2}{25cm^2} = 2 = k^2 \quad k = \sqrt{2}$ **(C)**

Zad 13. $\{x-2;\ \ 6;\ \ 12\} - ciąg\ geometryczny\ \ q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{6} = 2$

$q = \frac{a_2}{a_1} \quad \Longrightarrow \quad 2 = \frac{6}{x-2} \quad \Longrightarrow \quad 2(x-2) = 6 \quad \Longrightarrow \quad 2x - 4 = 6$

$2x = 10 \quad \Longrightarrow \quad x = 5$ **(D)**

Zad 14. $\tan\alpha = \frac{2}{5}$ taka równość zachodzi przykładowo w trójkącie

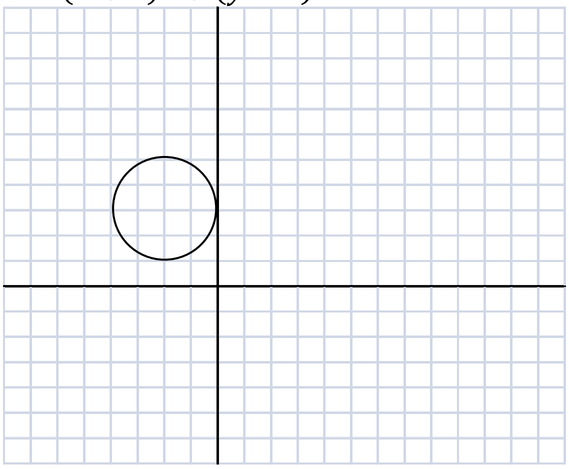


wtedy $2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$

$c^2 = 29 \quad \Longrightarrow \quad c = \sqrt{29} \quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}} \quad \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$\frac{3\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha - 5\cos\alpha} = \frac{3\frac{5}{\sqrt{29}} - 2\frac{2}{\sqrt{29}}}{\frac{2}{\sqrt{29}} - 5\frac{5}{\sqrt{29}}} = \frac{\frac{15}{\sqrt{29}} - \frac{4}{\sqrt{29}}}{\frac{2}{\sqrt{29}} - \frac{25}{\sqrt{29}}} = \frac{\frac{11}{\sqrt{29}}}{-\frac{23}{\sqrt{29}}} = \frac{11}{\sqrt{29}} \cdot \frac{\sqrt{29}}{-23} = -\frac{11}{23}$ **(A)**

Zad 15. $(x+2)^2+(y-3)^2=4$ $r^2=4$ $r=2$ $(-2;\ \ 3)$ - środek okręgu



Jak widać z rysunku jeden punkt wspólny z osią OY **(B)**

Zad 16.

$\sin 60° = \frac{h}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{2\sqrt{3}} \Rightarrow 2h = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow 2h = 6 \Rightarrow h = 3$ **(B)**

Zad 17. Maksymalnie kąt środkowy może mieć 360°, tak więc $\frac{4}{9}\cdot 360° = \frac{4\cdot 360°}{9} = 4\cdot 40° = 160°$ **(A)**

Zad 18. $f(1)=2$ $P=(-2;\ \ 3)$ współczynnik kierunkowy $a=\frac{3-2}{-2-1}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$ **(A)**

Zad 19. Jeżeli ostrosłup ma 10 krawędzi tzn. 5 krawędzi bocznych i 5 krawędzi podstawy **(A)**

Zad 20. $2\pi rh = \pi rl |: \pi r \Rightarrow 2h = l$ **(C)**

Zad 21. Każda liczba do potęgi zerowej = 1

$\left(\frac{1}{\left(\sqrt[3]{729}+\sqrt[4]{256}+2\right)^0}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{1}\right)^{-2} = 1^{-2} = 1$ **(C)**

Zad 22. $y=-2^{x-2}$ Funkcja potęgowa ma tylko wartości dodatnie a że tu mamy „**–,,** przed dwójką to ma tylko wartości ujemne więc odpowiedzią może być tylko A lub B

dla x = 2 mamy $y=-2^{2-2}=-2^0=-1$ $(2;\ -1)$ **(B)**

Zad 23. $P(A)=2\cdot P(A')$ wiadomym jest że $P(A)+P(A')=1$ czyli $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$ **(A)**

Zad 24. Znając wzór na kombinację mamy $\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!\cdot 8!}=\frac{9\cdot 10}{1\cdot 2}=\frac{90}{2}=45$

Rozpatrując zadanie bez w/w wzoru mamy: Zawodnika „a" można wybrać z pośród 10 zawodników na 10 sposobów. Następnie zawodnika „b" wybieramy z 9 zawodników a więc mamy $10\cdot 9=90$ możliwości. Należy jednak zauważyć że w tym zadaniu wybór $\{a;\ b\}$ jest taki sam jak $\{b;\ a\}$. Tak więc mamy $90:2=45$ **(C)**

Zad 25. Mamy zbiór $\{2;\ 12;\ a;\ 10;\ 5;\ 3\}$ i jego mediana 7. Trzeba ten zbiór uporządkować na ile to możliwe: $\{2;\ 3;\ 5;\ a;\ 10;\ 12\}$ Gdyby środkowymi liczbami miałyby być $\{5;\ \ 10\}$ to mediana by wynosiła $\frac{5+10}{2}=\frac{15}{2}=7{,}5$. Tak więc środkowymi muszą być $\{5;\ \ a\}$ i obliczamy z nich średnią czyli medianę: $\frac{5+a}{2}=7 \Rightarrow 5+a=14 \Rightarrow a=14-5 \Rightarrow a=9$ **(D)**

Zadania otwarte

Zad 26. $f(x)=2x^2+bx+c$ $W=(p;\ q)=(4;\ 0)$

Z postaci kanonicznej mamy $f(x)=a(x-p)^2+q$ czyli $f(x)=2(x-4)^2+0$

$2(x-4)^2+0=2(x^2-8x+16)=2x^2-16x+32$

Odpowiedź: $f(x)=2x^2-16x+32$ czyli $b=-16$ $c=32$

Zad 27. $9x^3+18x^2-4x-8=0$

$9x^2(x+2)-4(x+2)=0$

$(9x^2-4)(x+2)=0$

$(3x-2)(3x+2)(x+2)=0$

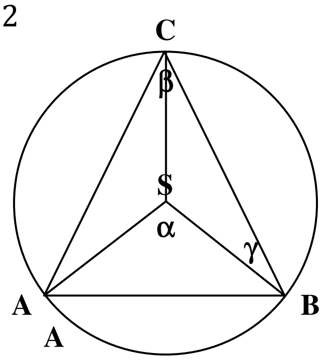
$3x-2=0 \ \vee \ 3x+2=0 \ \vee \ x+2=0$
$3x=2 \ \vee \ 3x=-2 \ \vee \ x=-2$
Odpowiedź: $x_1=\frac{2}{3} \quad \vee \quad x_2=-\frac{2}{3} \quad \vee \quad x_3=-2$

Zad 28. Zgodnie z założeniami zadania: $k=7m+2$
$3k^2=3(7m+2)^2=3(49k^2+28k+4)=147k^2+84k+12=147k^2+84k+7+5=$
$=7(21k^2+12k+1)+5$

Zad 29. Patrząc na przesunięcie wykresu o 2 jednostki w prawo i 1 jednostkę do dołu widzimy że wzór funkcji ***f*** ma postać: $f(x)=\frac{1}{x-2}-1$. Jeżeli $g(x)=f(x-3)$ to $g(x)=\frac{1}{x-3-2}-1=\frac{1}{x-5}-1$
Czyli wykres funkcji ***g*** jest przesunięty względem wykresu funkcji ***f*** o kolejne 3 jednostki w prawo.
Jeżeli widzimy że miejsce zerowe funkcji ***f*** wynosi $x=3$ to dla funkcji ***g*** będzie $x=3+3=6$.
Można też rozwiązać równanie $\frac{1}{x-5}-1=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x-5}-\frac{x-5}{x-5}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1-x+5}{x-5}=0 \quad \Rightarrow$
$-x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x=6$
Odpowiedź: a) wartości dodatnie są dla $x\in(2;\ \ 3)$
b) miejsce zerowe funkcji g to $x=6$

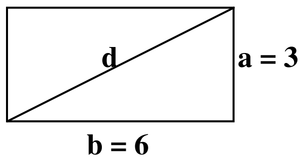
Zad 30. Zbiór $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$ Jeżeli losujemy dwukrotnie ze zwracaniem to jest analogicznie jak rzut 2 razy kostką tylko że tu jest 8 liczb czyli $\overline{\overline{\Omega}}=8^2=64$ (jest to wariacja z powtórzeniami, gdyż liczba jest zwracana więc może się powtórzyć)
$A=\{(8;\ 4);\ (7;\ 3);\ (6;\ 2);\ (5;\ 1);\ (8;\ 2);\ (7;\ 1)\}$ $\quad \overline{\overline{A}}=6$
$$P(A)=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$$

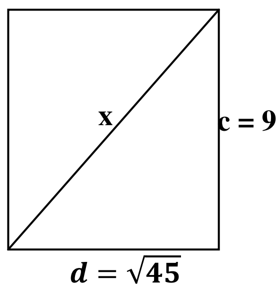
Zad 31.



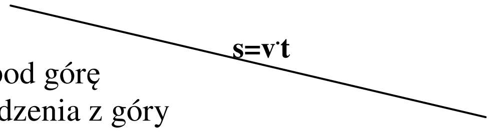
$\sphericalangle ASB=\alpha$ - kąt środkowy
$\sphericalangle ACB=\beta$ - kąt wpisany oparty na tym samym łuku
$\alpha=2\beta$
Odcinek ***CS*** dzieli kąt β na połowy bo trójkąt ABC równoramienny. Trójkąt BSC równoramienny |BS| = |SC| = r – promień okręgu. Stąd $\gamma=\frac{1}{2}\beta$
wcześniej było że $\beta=\frac{1}{2}\alpha$ Stąd $\gamma=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{4}\alpha$ czyli
$\alpha=4\gamma$

Zad 32. Uczeń klasy IV szkoły podstawowej kiedyś wiedział że $P_{pc}=2ab+2ac+2bc$ gdzie ***a, b, c*** długości krawędzie prostopadłościanu. Przyjmijmy $b=2a;\quad c=3a$ wtedy
$P_{pc}=2\cdot a\cdot 2a+2\cdot a\cdot 3a+2\cdot 2a\cdot 3a=4a^2+6a^2+12a^2=22a^2$
$22a^2=198|:22 \quad \Rightarrow \quad a^2=9 \quad \Rightarrow \quad a=\sqrt{9}=3$
$a=3;\quad b=6;\quad c=9$ - wymiary prostopadłościanu
$3^2+6^2=d^2 \quad \Rightarrow \quad d^2=9+36=45 \quad \Rightarrow \quad d=\sqrt{45}$
$d=\sqrt{45}$ - przekątna podstawy prostopadłościanu
$\sqrt{45}^2+9^2=x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2=45+81=126$
$x=\sqrt{126}=\sqrt{9\cdot 14}=3\sqrt{14}$
Odpowiedź: Przekątna tego prostopadłościanu ma długość $3\sqrt{14}$





Zad 33.



$v = x$ - prędkość wchodzenia pod górę

$v + 1 = x + 1$ - prędkość schodzenia z góry

$t = y$ - czas wchodzenia pod górę

$1\frac{4}{60} - y = \frac{64}{60} - y = \frac{16}{15} - y$ - czas schodzenia z góry

W ruchu jednostajnym wzór na drogę jest $s = v \cdot t = x \cdot y$

$$\begin{cases} x \cdot y = 2{,}1 - droga\ pod\ górę \\ (x+1)\left(\frac{16}{15} - y\right) = 2{,}1 - z\ góry \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2{,}1}{x} \\ \frac{16}{15}x - xy + \frac{16}{15} - y = 2{,}1 \end{cases}$$ Wstawiamy I równanie do II i rozwiązujemy samo II równanie

$\frac{16}{15}x - x \cdot \frac{2{,}1}{x} + \frac{16}{15} - \frac{2{,}1}{x} = 2{,}1$

$\frac{16}{15}x - 2{,}1 + \frac{16}{15} - \frac{2{,}1}{x} = 2{,}1$

$\frac{16}{15}x - 2{,}1 - 2{,}1 + \frac{16}{15} - \frac{2{,}1}{x} = 0$

$\frac{16}{15}x - 4\frac{2}{10} + 1\frac{1}{15} - \frac{2{,}1}{x} = 0$

$\frac{16}{15}x - 4\frac{6}{30} + 1\frac{2}{30} - \frac{2{,}1}{x} = 0$

$\frac{16}{15}x - 3\frac{4}{30} - \frac{2{,}1}{x} = 0 | \cdot x$

$\frac{16}{15}x^2 - 3\frac{4}{30}x - 2{,}1 = 0 | \cdot 30$

$32x^2 - 94x - 63 = 0$

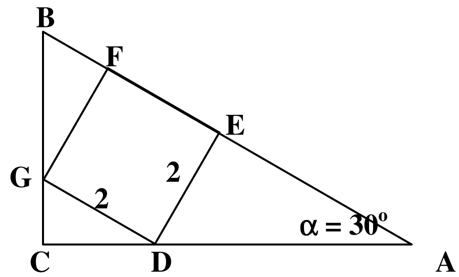
$\Delta = (-94)^2 - 4 \cdot 32 \cdot (-63) = 8836 + 8064 = 16900$ $\sqrt{16900} = 130$

$x_1 = \frac{94-130}{2 \cdot 32} = \frac{-36}{64} = -\frac{9}{16}$ $x_2 = \frac{94+130}{2 \cdot 32} = \frac{224}{64} = 3\frac{32}{64} = 3{,}5$

Prędkość nie może być ujemna więc $x_1 = -\frac{9}{16}$ nie spełnia warunków zadania

Odpowiedź: Prędkość wchodzenia pod górę wynosiła $3{,}5\frac{km}{h}$

Zad 34.



Jeżeli $P_{DEFG} = 4$ to boki kwadratu |DE| = |EF| = |FG| = |GD| =2

Wszystkie trójkąty występujące na tym rysunku są podobne bo są prostokątne i maja parami jeden kąt ostry wspólny. Trójkąty te mają kąty: 30°, 60°, 90°.

Rozpatrując trójkąt AED mamy: $\sin 30° = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{AD} \Rightarrow AD = 4$

Rozpatrując trójkąt DGC mamy: $\cos 30° = \frac{CD}{DG} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CD}{2} \Rightarrow CD = \sqrt{3}$

$|AC| = |AD| + |DC| = 4 + \sqrt{3}$

Rozpatrując trójkąt ABC mamy: $\tan 30° = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BC}{4+\sqrt{3}} \Rightarrow 3BC = \sqrt{3}(4+\sqrt{3})$

$BC = \frac{\sqrt{3}(4+\sqrt{3})}{3} = \frac{4\sqrt{3}+3}{3}$

$P_{ABC} = \frac{1}{2}(4+\sqrt{3})\left(\frac{4\sqrt{3}+3}{3}\right) = \frac{16\sqrt{3}+12+12+3\sqrt{3}}{6} = \frac{24+19\sqrt{3}}{6} = 4 + \frac{19}{6}\sqrt{3}$

Odpowiedź: Pole trójkąta ABC wynosi $4 + \frac{19}{6}\sqrt{3}$