Zadania zamknięte

Zad 1. $\log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^2 = 2$ **(A)**

Zad 2. $n = 2^{14} \cdot 5^{15} = (2 \cdot 5)^{14} \cdot 5 = 10^{14} \cdot 5$ czyli 5 i 14 zer czyli 15 cyfr **(B)**

Zad 3. Mając oprocentowanie 4% i zmniejszając go o 1 punkt procentowy zmienia się ono do 3%. Oznacza to zmniejszenie oprocentowania o 25% bo oprocentowanie zmniejsza się o $\frac{1\%}{4\%} = \frac{1}{4} = 25\%$ **(B)**

Zad 4. $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{a} = 1 \qquad \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{9}{20}$

$1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$ czyli $\frac{1}{a} = \frac{11}{20}$ stąd $a = \frac{20}{11}$ **(D)**

Zad 5. $\begin{cases} ax + y = 4 \\ -2x + 3y = 2a \end{cases} \qquad x = 2;\ y = 2$

tu łatwo zgadnąć że takie rozwiązanie jest tylko dla $a = 1$ wtedy mamy:

$\begin{cases} 1 \cdot 2 + 2 = 4 \\ -2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 2 \cdot 1 \end{cases}$ **(B)**

Zad 6. $\frac{(x-1)(x+2)}{x-3} = 0$ Rozwiązaniami takiego równania są rozwiązania licznika czyli:

$(x-1)(x+2) = 0$ czyli $x - 1 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$

$x_1 = 1 \quad \vee \quad x_2 = -2$ **(C)**

Zad 7. $f(x) = 3(x+1) - 6\sqrt{3}$ miejsce zerowe $f(x) = 0$ czyli

$3(x+1) - 6\sqrt{3} = 0$

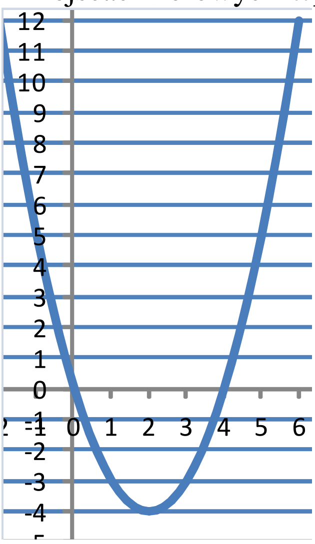
$3x + 3 - 6\sqrt{3} = 0$

$3x = -3 + 6\sqrt{3} |:3$

$x = 2\sqrt{3} - 1$ **(C)**

Dany jest wykres funkcji kwadratowej o wierzchołku $W = (2;\ -4) = (p;\ \ q)$

i miejscach zerowych $x_1 = 0 \quad x_2 = 4$



Zad 8. Zbiór wartości odczytujemy patrząc na oś Y czyli: $Zbw = \langle -4;\ +\infty)$ **(C)**

Zad 9. Patrząc na wykres widać że: $f(1) = -2 \qquad f(4) = 0$ **(D)**

Zad 10. Osią symetrii jest prosta o równaniu $x = p$ czyli $x = 2$ **(D)**

Zad 11. $a_1 = 7 \qquad a_8 = -49$

$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = \frac{7 + (-49)}{2} \cdot 8 = \frac{-42}{2} \cdot 8 = -21 \cdot 8 = -168$ **(A)**

Zad 12. Ciąg geometryczny $\frac{a_5}{a_3} = \frac{1}{9}$

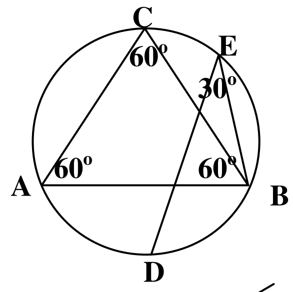
$\frac{a_5}{a_3} = \frac{a_1 \cdot q^4}{a_1 \cdot q^2} = \frac{q^2}{1} = q^2 = \frac{1}{9} \quad q = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ **(A)**

Zad 13. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ i znając jedynkę trygonometryczną mamy:

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} \qquad \Rightarrow \qquad \cos^2\alpha = \frac{9}{25}$

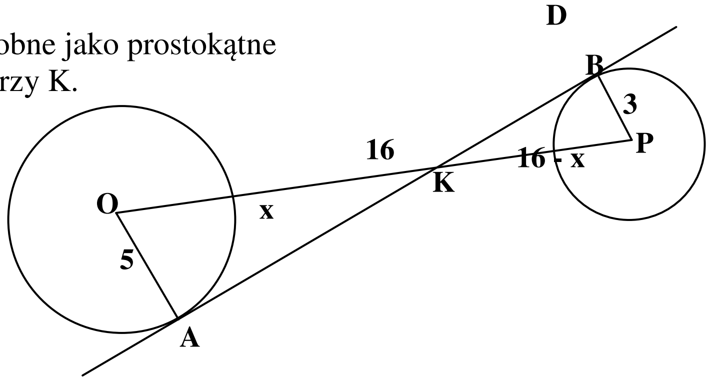
$\cos\alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ (D)

Zad 14. W trójkącie ABC jako równobocznym kąty maja po 60^o. Kąt ACB możemy potraktować jako kąt wpisany w okrąg oparty na łuku AB. Kąt DEB jest też kątem wpisanym opartym na łuku DB będącym połową łuku AB.



$\sphericalangle DEB = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$ **(A)**

Zad 15. Trójkąty AKO i BPK są podobne jako prostokątne i z kątami wierzchołkowymi przy K.
tak więc:



$\frac{x}{5} = \frac{16-x}{3}$
$3x = 5(16 - x)$
$3x = 80 - 5x$
$3x + 5x = 80$
$8x = 80|:8$
$x = 10$ **(C)**

Zad 16. Jeżeli kąt rozwarty rombu ma 150^o to kąt ostry ma $180^o - 150^o = 30^o$
$P = 4 \cdot 4 \cdot \sin 30° = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$ **(A)**

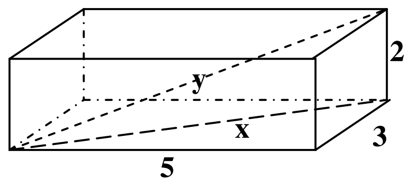
Zad 17. $y = (2m + 2)x - 2019$ $\quad y = (3m - 3)x + 2019$
jeżeli mają być równoległe to mają ten sam współczynnik kierunkowy, czyli
$2m + 2 = 3m - 3$
$2m - 3m = -3 - 2$
$-m = -5$ $\quad m = 5$ **(D)**

Zad 18. $y = ax + b$ prostopadła do $y = -4x + 1$ i przechodzi przez $P = \left(\frac{1}{2};\ \ 0\right)$
dla $a_1 = -4$ prostopadłą jest gdy $a_2 = \frac{1}{4}$ $\quad -4 \cdot \frac{1}{4} = -1$ Mamy więc:
$y = \frac{1}{4}x + b$ czyli $0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + b \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{8}$ **(B)**

Zad 19. $A = (0;\ 4)$ $\quad B = (2;\ 2)$ Wykres przechodzi przez 4 na osi Y więc $b = 4$
$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-4}{2-0} = \frac{-2}{2} = -1$ Wzór funkcji której wykres jest to: $f(x) = -x + 4$
$g(x) = -f(-x)$ – symetria względem $(0;\ \ 0)$
$g(x) = -[-(-x) + 4] = -[x + 4] = -x - 4$ **(C)**

Zad 20. $A = (-2;\ 5)$ $\quad B = (4;\ -1)$
$|AB| = \sqrt{\left(4 - (-2)\right)^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$
średnica okręgu wpisanego w kwadrat jest taka sama jak bok kwadratu $6\sqrt{2}$ **(C)**

Zad 21. Liczymy przekątną podstawy **x**
$5^2 + 3^2 = x^2$
$x^2 = 25 + 9 = 34$



Liczymy szukaną przekątną **y**
$x^2 + 2^2 = y^2$
$y^2 = 34 + 4 = 38$
$y = \sqrt{38} \approx 6{,}1644 \cdots$ **(B)**

Zad 22. $r = 4$ promień kuli i promień podstawy stożka
$P_{pc} = 4\pi r^2 = 4\pi 4^2 = 64\pi$ – pole powierzchni kuli
$P_{pc} = \pi r^2 + \pi rl = \pi 4^2 + \pi \cdot 4 \cdot l = 16\pi + 4\pi l$ – pole powierzchni stożka
$64\pi = 16\pi + 4\pi l$
$4\pi l = 48\pi|:4\pi$
$l = 12$ **(D)**

Zad 23. Mamy zbiór $\{4;\ 8;\ 21;\ a;\ 16;\ 25\}$ Aby medianą była liczba 14, trzeba go uporządkować:
$\{4;\ 8;\ a;\ 16;\ 21;\ 25\}$ i policzyć średnią z liczb środkowych $\frac{a+16}{2} = 14| \cdot 2$
$a + 16 = 28 \quad \Rightarrow \quad a = 28 - 16 \quad \Rightarrow \quad a = 12$ **(B)**

Zad 24. Mamy cyfry $\{0;\ 2;\ 5\}$ Aby utworzyć ciągi pięcioelementowe to takich możliwości jest $3^5 = 243$, jednak wtedy wystąpią też zera na początku i trzeba policzyć ile jest takich sytuacji. Ustalamy że jest

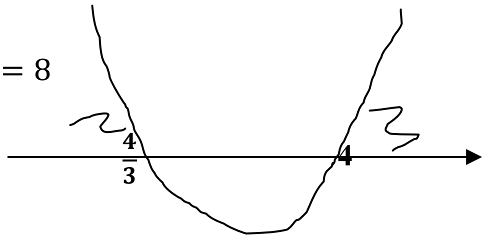
na początku zero a dalej dowolny ciąg czteroelementowy więc $3^4 = 81$.
Ostatecznie $243 - 81 = 162$ ***(nie za bardzo wiem jak to zrobić nie mając wiedzy o wariacjach z powtórzeniami)*** **(C)**

Zad 25. Wszystkie kule $\overline{\overline{\Omega}} = 40$ Kule czerwone $\overline{\overline{A}} = 5$
$P(A) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$ **(A)**

Zadania otwarte

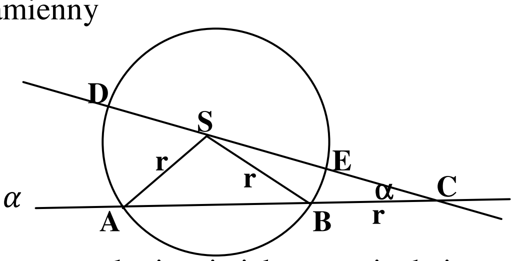
Zad 26. $(x^3 - 8)(x^2 - 4x - 5) = 0$
$x^3 - 8 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 4x - 5 = 0$
$x^3 = 8 \qquad \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 \qquad \sqrt{36} = 6$
$x_1 = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad x_2 = \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad x_3 = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$
Odp.: Mamy trzy rozwiązania $x_1 = 2 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 5$

Zad 27. $3x^2 - 16x + 16 > 0$
$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = 256 - 192 = 64 \qquad \sqrt{64} = 8$
$x_1 = \frac{16-8}{2\cdot 3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \qquad x_2 = \frac{16+8}{2\cdot 3} = \frac{24}{6} = 4$
Odp: $x \in \left(-\infty;\ \frac{4}{3}\right) \cup (4;\ +\infty)$



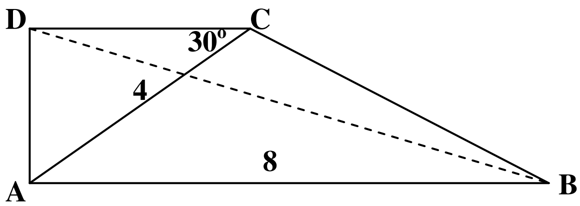
Zad 28. Dla dowolnych **a** i **b** zachodzi $3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0$
$3a^2 - 2ab + 3b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 2a^2 + 2b^2 = (a-b)^2 + 2(a^2 + b^2)$
Odpowiedź: Wyrażenie dało się zapisać jako suma kwadratów pewnych liczb: $a - b$; a; b. Kwadraty liczb są liczbami nieujemnymi i ich suma też jest liczba nieujemną (cbdo)

Zad 29. Z założenia zadania |BC| = r więc trójkąt BCS równoramienny
$\sphericalangle BSC = \sphericalangle BCS = \alpha$ stąd $\sphericalangle SBC = 180° - 2\alpha$
$\sphericalangle ABS = 2\alpha$ jako przyległy do $\sphericalangle SBC$
Trójkąt ASB równoramienny |AS| = |BS| = r
$\sphericalangle SAB = \sphericalangle ABS = 2\alpha$ stąd $\sphericalangle ASB = 180° - 4\alpha$
$\sphericalangle ASC = \sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC = 180° - 4\alpha + \alpha = 180° - 3\alpha$
$\sphericalangle DSA = 180° - (180° - 3\alpha) = 3\alpha$ (cbdo)



Zad 30. Mamy zbiór $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ i losujemy ze zwracaniem to analogicznie jak w rzucie dwiema kostkami gdzie $\overline{\overline{\Omega}} = 6^2 = 36$ a tu oczywiście będzie $\overline{\overline{\Omega}} = 5^2 = 25$
Zdarzenie A - wypadły liczby których iloczyn jest nieparzysty
$A = \{1{,}1;\ 1{,}3,\ 1{,}5;\ 3{,}1;\ 3{,}3;\ 3{,}5;\ 5{,}1;\ 5{,}3;\ 5{,}5\}\ \overline{\overline{A}} = 9$
$P(A) = \frac{9}{25}$

Zad 31.
$\sin 30° = \frac{AD}{AC} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{AD}{4} \quad \Rightarrow \quad AD = 2$
Teraz twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ABD
$2^2 + 8^2 = BD^2$
$BD^2 = 4 + 64 = 68$
$BD = \sqrt{68} = \sqrt{4 \cdot 17} = 2\sqrt{17}$



Zad 32. Ciąg arytmetyczny $r = -4$
średnia arytmetyczna $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6} = 16 | \cdot 6$
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 96$
$a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r + a_1 + 3r + a_1 + 4r + a_1 + 5r = 96$
$6a_1 + 15r = 96 \quad \Rightarrow \quad 6a_1 + 15 \cdot (-4) = 96$
$6a_1 = 96 + 60 \quad \Rightarrow \quad 6a_1 = 156 |: 6 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 26$
$a_k = -78 \qquad a_k = a_1 + (k-1)r$
$-78 = 26 + (k-1) \cdot (-4)$
$-78 = 26 - 4k + 4 \quad \Rightarrow \quad 4k = 30 + 78 \quad \Rightarrow \quad 4k = 108 |: 4$
$k = 27$
Odpowiedź pierwszy wyraz ciągu $a_1 = 26$. Natomiast 27 wyraz ciągu ma wartość – 78.

Zad 33. $A = (-18;\ \ 10) \quad y = 3x$ – symetralna odcinka AB.
Z warunków zadania wynika że prosta AB jest prostopadła do $y = 3x$ czyli równanie prostej AB ma

postać $y = -\frac{1}{3}x + b$ $\left(a_2 = -\frac{1}{a_1} = -\frac{1}{3}\right)$ i przechodzi przez $A = (-18; \quad 10)$

$10 = -\frac{1}{3} \cdot (-18) + b \qquad 10 = 6 + b \qquad b = 4$

Prosta AB ma postać: $y = -\frac{1}{3}x + 4$

Obliczmy współrzędne punktu przecięcia tych prostych

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = -\frac{1}{3}x + 4 \end{cases}$$

$3x = -\frac{1}{3}x + 4| \cdot 3$

$9x = -x + 12 \qquad 10x = 12|:10 \qquad x = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

$y = 3x = 3 \cdot \frac{6}{5} = \frac{18}{5}$ $S = \left(\frac{6}{5}; \quad \frac{18}{5}\right)$ - środek odcinka AB $A = (-18; \quad 10)$ $B = (x; \quad y)$

Korzystając ze wzoru na środek odcinka mamy: $\frac{-18+x}{2} = \frac{6}{5} \qquad \frac{10+y}{2} = \frac{18}{5}$

$5(-18 + x) = 2 \cdot 6 \qquad 5(10 + y) = 2 \cdot 18$

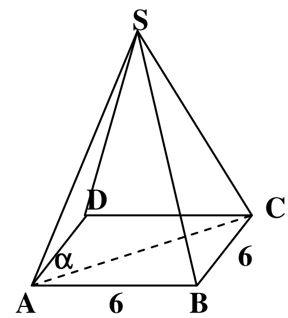
$-90 + 5x = 12 \qquad 50 + 5y = 36$

$5x = 12 + 90 \qquad 5y = 36 - 50$

$5x = 102 \implies x = \frac{102}{5} = 20{,}4 \qquad 5y = -14 \implies y = \frac{-14}{5} = -2{,}8$

Odp: Współrzędne punktu B to: $(20{,}4; \quad -2{,}8)$

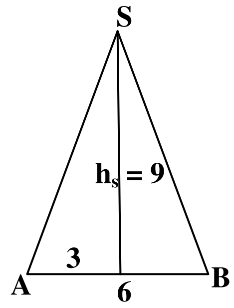
Zad 34.



$P_p = a^2 = 6^2 = 36$

$P_{pc} = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_s + 36 = 2 \cdot 6 \cdot h_s + 36$ h_s - wysokość ściany

$P_{pc} = 4 \cdot P_p$ - tyle z warunków zadania, czyli:



$12h_s + 36 = 4 \cdot 36$

$12h_s = 144 - 36$

$12h_s = 108|:12$

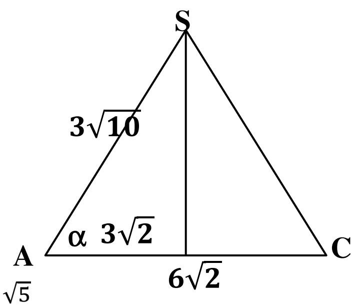
$h_s = 9$

Korzystając z faktu że ściany boczne są trójkątami równoramiennymi obliczymy długość krawędzi AS.

$AS^2 = 9^2 + 3^2 = 81 + 9 = 90$

$AS = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

Korzystając teraz z trójkąta ACS będącego przekrojem ostrosłupa przechodzącą wzdłuż przekątnej podstawi i przez wierzchołek mamy:



$AC = 6\sqrt{2}$ - przekątna kwadratu

$\cos\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{2}{10}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Odpowiedź: kosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do podstawy wynosi $\frac{\sqrt{5}}{5}$