<u>*Listopad 2018 rok (poziom rozszerzony)*</u>

<u>*Zadania zamknięte*</u>

Zad 1. $a_1 = 16 \qquad a_3 = 1 \qquad a_3 = a_1 \cdot q^2$

$1 = 16 \cdot q^2 \qquad q^2 = \frac{1}{16} \qquad q = -\sqrt{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{4}$ bo ciąg ma być niemonotoniczny

$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{16}{1+\frac{1}{4}} = 16 \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{5} = 12\frac{4}{5} = 12{,}8$ **(B)**

Zad 2. $f(x) = \log_{x+1}(4 - x^2)$ określić dziedzinę.

I) podstawa logarytmu jest większa od zera i różna od 1 czyli: $x + 1 > 0 \quad \wedge \quad x + 1 \neq 1$

$x > -1 \quad \wedge \quad x \neq 0 \qquad x \in (-1;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$

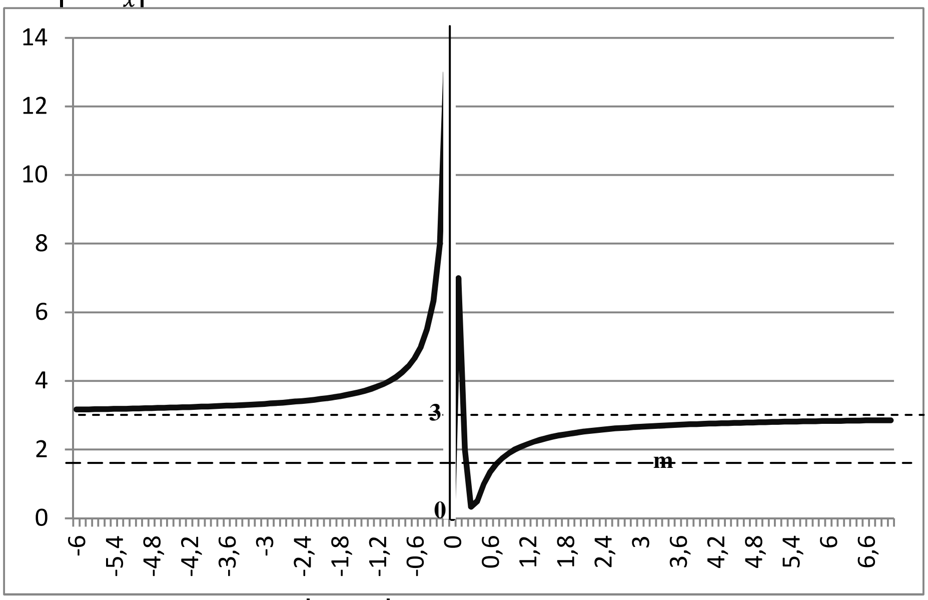
II) Liczba logarytmowana jest dodatnia czyli: $4 - x^2 > 0 \qquad (2 - x)(2 + x) > 0$

$x \in (-2;\ 2)$

teraz szukamy części wspólnej I i II

Odpowiedź: $x \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 2)$ **(C)**

Zad 3. $\left|3 - \frac{1}{x}\right| = m$. Kiedy 2 rozwiązania dodatnie?



Z wykresu funkcji $y = \left|3 - \frac{1}{x}\right|$ widać że dla $m \in (0;\ 3)$ prosta odpowiadająca wartości m przecina wykres w 2 miejscach po prawej stronie osi OY czyli są to wartości dodatnie.

(B)

Zad 4. $f(x) = \frac{x+3}{(x-2)^2} \qquad D = R\backslash\{2\}$

to $f'(x) = \frac{1 \cdot (x-2)^2 - (x+3) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x^2-4x+4-2(x^2-2x+3x-6)}{(x-2)^4} = \frac{x^2-4x+4-2x^2-2x+12}{(x-2)^4} = \frac{-x^2-6x+16}{(x-2)^4}$

Sprawdzamy kiedy może być ekstremum: $-x^2 - 6x + 16 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 16 = 36 + 64 = 100 \qquad \sqrt{100} = 10$

$x_1 = \frac{6-10}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad x_2 = \frac{6+10}{-2} = \frac{16}{-2} = -8$

$x_1 = 2$ nie należy do dziedziny

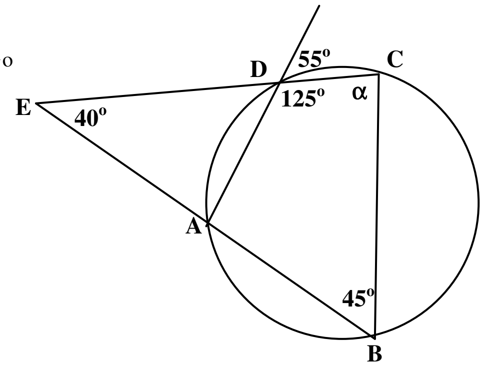
Tak więc $x_2 = -8$ to jedyne ekstremum lokalne **(D)**

Zad 5. $\sphericalangle ADC = 125°$ jako kąt przyległy do danego kąta 55°

$\sphericalangle ABC = 180° - 125° = 55°$ - z sumy kątów przeciwległych w czworokącie wpisanym w okrąg.

Teraz z trójkąta BCE mamy:

$\alpha = 180° - (40° + 55°) = 180° - 95° = 85°$



(A)

Zad 6. $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x-3}{x+2}-\frac{x^3-52}{x^3+8}\right)$ $\qquad D=R\backslash\{2\}$

Przekształcimy i uprościmy wyrażenie

$\frac{x-3}{x+2}-\frac{x^3-52}{x^3+8}=\frac{(x-3)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}-\frac{x^3-52}{x^3+8}=\frac{x^3-2x^2+4x-3x^2+6x-12-x^3+52}{x^3+8}=\frac{-5x^2+10x+40}{x^3+8}=\frac{-5(x^2-2x-8)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$

teraz przekształćmy do iloczynu wyrażenie x^2-2x-8

$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)=4+32=36$ $\qquad \sqrt{36}=6$

$x_1=\frac{2-6}{2}=\frac{-4}{2}=-2$ $\qquad x_2=\frac{2+6}{2}=\frac{8}{2}=4$

Tak więc $x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$

Mamy więc dalej

$\frac{-5(x^2-2x-8)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{-5(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{-5(x-4)}{(x^2-2x+4)}$ dla $x\neq -2$

Wartość otrzymanego wyrażenia można policzyć dla $x=-2$

$\frac{-5(x-4)}{(x^2-2x+4)}=\frac{-5\cdot(-6)}{(-2)^2-2\cdot(-2)+4}=\frac{30}{4+4+4}=\frac{30}{12}=2{,}5$ Tak więc $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x-3}{x+2}-\frac{x^3-52}{x^3+8}\right)=2{,}5$

Odpowiedź: $\boxed{2}\,\boxed{5}\,\boxed{0}$

Zad 7. $3x-|2x-7|<11$ czyli $-|2x-7|<11-3x \mid \cdot(-1)$

$|2x-7|>3x-11$

Ustalmy teraz znak wyrażenia z pod wartości bezwzględnej $2x-7$

$2x-7=0 \quad\Rightarrow\quad 2x=7 \quad\Rightarrow\quad x=3{,}5$

Mamy więc

$|2x-7|=\begin{cases}2x-7 & dla\ x\geq 3{,}5\\ -2x+7 & dla\ x<3{,}5\end{cases}$

Mamy więc do rozwiązania dwie nierówności: $\begin{cases}2x-7>3x-11 & dla\ x\geq 3{,}5\\ -2x+7>3x-11 & dla\ x<3{,}5\end{cases}$

I) $2x-7>3x-11$

$2x-3x>7-11 \quad\Rightarrow\quad -x>-4 \quad\Rightarrow\quad x<4 \quad\wedge\quad x\geq 3{,}5$

$x\in\langle 3{,}5;\ \ 4)$

II) $-2x+7>3x-11$

$-2x-3x>-7-11 \quad\Rightarrow\quad -5x>-18|:(-5) \quad\Rightarrow\quad x<3{,}6\wedge\ \ x<3{,}5$

$x\in(-\infty;\ \ 3{,}5)$

Odpowiedź: Ostatecznie suma odpowiedzi I i II: $x\in(-\infty;\ \ 4)$

Zad 8. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos x=\frac{3}{2}$ $\qquad x\in\langle 0;\ \ 2\pi\rangle$

korzystając z faktu że $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ mamy:

$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{2}$ Teraz korzystamy ze wzoru na $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\sin\frac{x+\frac{\pi}{6}+x+\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\cos\frac{x+\frac{\pi}{6}-x-\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{3}{2}$

$2\sin\frac{2x+\frac{4}{6}\pi}{2}\cdot\cos\left(-\frac{\frac{2}{6}\pi}{2}\right)=\frac{3}{2}$

$2\sin\left(x+\frac{1}{3}\pi\right)\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$ teraz wiedząc że $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ mamy:

$2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{3}{2}$ $\qquad \sqrt{3}\sin\left(x+\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{3}{2}$

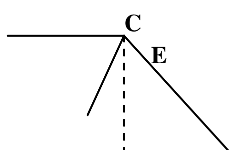
$\sin\left(x+\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{3}{2\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x+\frac{1}{3}\pi=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad\vee\quad x+\frac{1}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi+2k\pi \qquad k\in C$

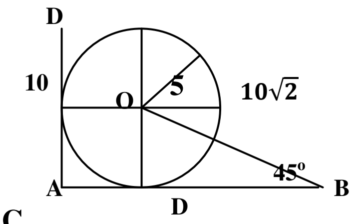
$x=2k\pi \quad\vee\quad x=\frac{1}{3}\pi+2k\pi$

Teraz trzeba podać rozwiązania dla $x\in\langle 0;\ \ 2\pi\rangle$

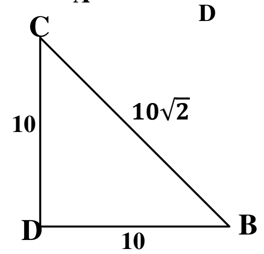
Mamy więc dla $k=0$ $\quad x_1=0;\quad x_2=\frac{1}{3}\pi$ dla $k=1$ $\quad x_3=2\pi$



Odpowiedź: Równanie ma 3 rozwiązania $x \in \left\{0; \quad \frac{1}{3}\pi; \quad 2\pi\right\}$



Zad 9. Oczywistym jest że jeżeli $r = 5$ to bok trapezu $AD = 10$
Rysując z wierzchołka C wysokość CD otrzymujemy trójkąt prostokątny BCD o przyprostokątnych $CD = BD = 10$
i przeciwprostokątnej $BC = 10\sqrt{2}$ korzystamy ze wzoru na przekątną kwadratu $BC = a\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$



Teraz wykażemy że trójkąt BOC jest prostokątny z wysokością $OE = 5$
wysokość OE dzieli go na dwa trójkąty prostokątne BOE i OEC
Trójkąty te są prostokątne bo promień OE jest prostopadły do boku BC (kąt stycznej z promieniem)
Tak więc trójkąt BOE ma kąty miary $\sphericalangle OBE = 45°: 2 = 22{,}5°$
$\sphericalangle BEO = 90°$; $\sphericalangle EOB = 180° - (90° + 22{,}5°) = 67{,}5°$
Teraz trójkąt OEC:
$\sphericalangle BCD = 180° - 45° = 135°$ a zatem $\sphericalangle OCE = 135°: 2 = 67{,}5°$
i trójkąt jest prostokątny więc $\sphericalangle COE = 22{,}5°$ Tak więc trójkąt BOC ma takie same kąty
Teraz w trójkącie BOC wprowadzamy oznaczenia $CE = x$; $BE = 10\sqrt{2} - x$
Korzystając z podobieństwa trójkątów BOE i OEC możemy zapisać proporcję:

$\frac{x}{5} = \frac{5}{10\sqrt{2}-x}$ $\qquad 5^2 = x\left(10\sqrt{2} - x\right)$

$25 = 10\sqrt{2}x - x^2$

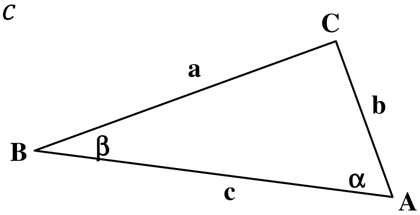
$x^2 - 10\sqrt{2}x + 25 = 0$

$\Delta = \left(-10\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 24 = 200 - 100 = 100 \qquad \sqrt{100} = 10$

$x_1 = \frac{10\sqrt{2}-10}{2} = 5\sqrt{2} - 5 \qquad x_2 = \frac{10\sqrt{2}+10}{2} = 5\sqrt{2} + 5$

Ostatecznie mamy: Jeżeli $CE = 5\sqrt{2} - 5$ to $BE = 10\sqrt{2} - \left(5\sqrt{2} - 5\right) = 5\sqrt{2} + 5$
Jeżeli $CE = 5\sqrt{2} + 5$ to $BE = 10\sqrt{2} - \left(5\sqrt{2} + 5\right) = 5\sqrt{2} - 5$
Odpowiedź: Ramię pochyłe trapezu podzielone jest na odcinki: $5\sqrt{2} - 5$ i $5\sqrt{2} + 5$

Zad 10. Trójkąt jest dowolny i $\alpha = 2\beta$ wykażemy że: $a^2 - b^2 = bc$



I) Z twierdzenia sinusów mamy: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ $\qquad \alpha = 2\beta$ czyli

$\frac{a}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin\beta}$ teraz wiedząc że $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$ Mamy:

$\frac{a}{2\sin\beta\cos\beta} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad a \cdot \sin\beta = b \cdot 2\sin\beta\cos\beta$

$a = \frac{2b\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta} = 2b\cos\beta \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\beta = \frac{a}{2b}$

II) Z twierdzenia kosinusów mamy:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ gdzie $\alpha = 2\beta$ oraz $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 2\beta$ czyli $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot (2\cos^2\beta - 1)$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \left(2\left(\frac{a}{2b}\right)^2 - 1\right)$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \left(2\frac{a^2}{4b^2} - 1\right) \qquad \Longrightarrow \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \left(\frac{a^2}{2b^2} - 1\right)$

$a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2c}{b} + 2bc$

Także z twierdzenia kosinusów

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ gdzie $\cos\beta = \frac{a}{2b}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\frac{a}{2b} \qquad b^2 = a^2 + c^2 - \frac{a^2c}{b}$

Teraz korzystając z układu otrzymanych równań:

$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2c}{b} + 2bc \,|\cdot b \\ b^2 = a^2 + c^2 - \frac{a^2c}{b} \,|\cdot b \end{cases}$ czyli po pomnożeniu przez ***b*** $\begin{cases} ba^2 = b^3 + bc^2 - a^2c + 2b^2c \\ b^3 = ba^2 + bc^2 - a^2c \end{cases}$

Teraz wstawiając II równanie do I mamy $ba^2 = (ba^2 + bc^2 - a^2c) + bc^2 - a^2c + 2b^2c$
$ba^2 = ba^2 + bc^2 - a^2c + bc^2 - a^2c + 2b^2c$
$ba^2 - ba^2 = 2bc^2 - 2a^2c + 2b^2c$
$2bc^2 - 2a^2c + 2b^2c = 0 |: 2c$
$bc - a^2 + b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -a^2 + b^2 = -bc | \cdot (-1) \quad \Rightarrow \quad a^2 - b^2 = bc$

Co należało wykazać.

Zad 11. $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ dzieli się przez $x^2 + x - 6$ a przez $x + 1$ z resztą 6

Obliczmy pierwiastki $x^2 + x - 6$
$x^2 + x - 6 = 0$
$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 \qquad \sqrt{25} = 5$
$x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3 \qquad x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$
Wiemy więc że $W(-3) = 0$ $W(2) = 0$ natomiast $W(-1) = 6$
Mamy więc do rozwiązania układ 3 równań z trzema niewiadomymi ***a, b, c***:

$$\begin{cases} 2(-3)^3 + a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = 0 \\ 2 \cdot 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0 \\ 2 \cdot (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -54 + 9a - 3b + c = 0 \\ 16 + 4a + 2b + c = 0 \\ -2 + a - b + c = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a - 3b + c - 54 = 0 \\ 4a + 2b + c + 16 = 0 \\ a - b + c - 8 = 0 \end{cases}$$ Z III równania $a = b - c + 8$ i wstawiamy to do I i II

$$\begin{cases} 9(b - c + 8) - 3b + c - 54 = 0 \\ 4(b - c + 8) + 2b + c + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9b - 9c + 72 - 3b + c - 54 = 0 \\ 4b - 4c + 32 + 2b + c + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6b - 8c + 18 = 0 \\ 6b - 3c + 48 = 0 \end{cases}$$ II równanie pomnożymy przez (-1)

$$\begin{cases} 6b - 8c + 18 = 0 \\ -6b + 3c - 48 = 0 \end{cases}$$ po dodaniu stronami mamy:

$6b - 6b - 8c + 3c + 18 - 48 = 0$
$-5c - 30 = 0 \qquad -5c = 30 |: (-5) \qquad c = -6$
Teraz używając I równania mamy $6b - 8c + 18 = 0 \qquad 6b - 8 \cdot (-6) = -18$
$6b = -18 - 48 \qquad 6b = -66 |: 6 \qquad b = -11$
$a = b - c + 8 = -11 - (-6) + 8 = -11 + 6 + 8 = -11 + 14 = 3$
Odpowiedź: Rozwiązaniem układu jest:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -11 \\ c = -6 \end{cases}$$ Czyli $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$

Zad 12. Mamy zbiór $\{1;\ 2;\ 3;\ \cdots;\ 29;\ 30\}$ to

Prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$: tu musimy korzystać bezpośrednio z tego wzoru.
A - wylosowano takie dwie liczby że ich iloczyn jest mniejszy od 30
B - pierwsza wylosowana liczba jest mniejsza od drugiej
Ω - wylosowano dwie liczby z podanego zbioru bez zwracania
$\overline{\overline{\Omega}} = 30 \cdot 29 = 870$
Jeżeli nie zauważymy że zdarzenie B powstaje jako kombinacja $\binom{30}{2}$ to moc zbioru B będziemy liczyć etapami:
I) jak pierwszą liczbą była 1 to drugą mogły być wszystkie $\{2;\ 3;\ \cdots;\ 29;\ 30\} = 29$ możliwości,
II) jak pierwszą była 2 to drugą mogły być $\{3;\ 4;\ \cdots;\ 29;\ 30\} = 28$ możliwości
i tak dalej aż jak pierwszą była 29 to drugą musiałaby być tylko 30 czyli 1 możliwość.
Zliczając te wszystkie możliwości mamy $29 + 28 + 27 + \cdots + 16 + 15 + 14 + \cdots + 3 + 2 + 1 =$

$30 \cdot 14 + 15 = 420 + 15 = 435$

(Można też zauważyć że moc zbioru B łatwo policzyć bo jest po prostu kombinacja $\binom{30}{2}$ gdyż każda para wybierana jest tylko raz $\binom{30}{2} = \frac{30!}{2!\cdot 28!} = \frac{29\cdot 30}{2} = 29 \cdot 15 = 435$)

Tak więc $P(B) = \frac{435}{870}$

Teraz trzeba policzyć zdarzenia sprzyjające zdarzeniu $A \cap B$ czyli kiedy iloczyn mniejszy od 30 gdy pierwsza liczba mniejsza od drugiej.

Gdy pierwsza 1 to druga może być $\{2;\ \cdots;\ 29\}$ - 28 sztuk.

Gdy pierwsza 2 to druga może być $\{3;\ \cdots;\ 14\}$ - 12 sztuk.

Gdy pierwsza 3 to druga może być $\{4;\ \cdots;\ 9\}$ - 6 sztuk.

Gdy pierwsza 4 to druga może być $\{5;\ 6;\ 7\}$ - 3 sztuki.

Gdy pierwsza 5 to nie ma drugiej spełniającej wymagania zadania $\{5 \cdot 6 = 30 \lneqq 30\}$ - 0 sztuk.

Tak więc $\overline{\overline{A \cap B}} = 28 + 12 + 6 + 3 = 49$

$P(A \cap B) = \frac{49}{870}$ $\qquad$ $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{49}{870}}{\frac{435}{870}} = \frac{49}{435}$

Zad 13. $(m+1)x^2 + 2\sqrt{2}x - m^2 + 2 = 0$ różne rozwiązania spełniają warunek $x_1^2 + x_1^2 \geq m - x_1 \cdot x_2$

I) Aby równanie było kwadratowe: $a \neq 0$ czyli $m + 1 \neq 0$ $\qquad$ $m \neq -1$

II) Mają być 2 pierwiastki równanie czyli: $\Delta > 0$

$\Delta = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 4\cdot(m+1)\cdot(2-m^2) = 8 - (4m+4)(2-m^2) = 8 - 8m + 4m^3 - 8 + 4m^2 =$

$= 4m^3 + 4m^2 - 8m$ Musi być $\Delta > 0$ czyli $4m^3 + 4m^2 - 8m > 0$

Poszukajmy pierwiastków równania $4m^3 + 4m^2 - 8m = 0$

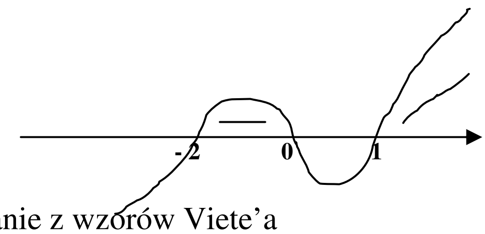
$4m(m^2 + m - 2) = 0$

$m_1 = 0 \quad \vee \quad m^2 + m - 2 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4\cdot 1 \cdot(-2) = 1 + 8 = 9 \qquad \sqrt{9} = 3$

$m_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad m_3 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$m \in (-2;\ \ 0) \cup (1;\ \ +\infty)$



III) Kiedy spełniony jest warunek $x_1^2 + x_1^2 \geq m - x_1 \cdot x_2$

Warunek ten przekształcimy do postaci aby możliwe było skorzystanie z wzorów Viete'a

$x_1^2 + x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$ czyli mamy

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 \geq m - x_1 \cdot x_2$

$(x_1 + x_2)^2 \geq m - x_1 \cdot x_2 + 2x_1 \cdot x_2$ czyli $(x_1 + x_2)^2 \geq m + x_1 \cdot x_2$

Teraz z wzorów Viete'a mamy $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2\sqrt{2}}{m+1} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2-m^2}{m+1}$

Czyli nasz warunek przyjmuje postać:

$\left(\frac{-2\sqrt{2}}{m+1}\right)^2 \geq m + \frac{2-m^2}{m+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{(m+1)^2} \geq \frac{m(m+1)+2-m^2}{m+1} \quad \Rightarrow$

$\frac{8}{(m+1)^2} \geq \frac{m^2+m+2-m^2}{m+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{(m+1)^2} \geq \frac{m+2}{m+1} \quad \Rightarrow$

$\frac{8}{(m+1)^2} - \frac{m+2}{m+1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{(m+1)^2} - \frac{(m+2)(m+1)}{(m+1)(m+1)} \geq 0 \quad \Rightarrow$

$\frac{8}{(m+1)^2} - \frac{m^2+m+2m+2}{(m+1)^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{8-m^2-3m-2}{(m+1)^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-m^2-3m+6}{(m+1)^2} \geq 0$

Z uwagi na to że $(m+1)^2$ jako kwadrat liczby jest nie ujemny oraz $m \neq -1$ to wystarczy zapisać:

$-m^2 - 3m + 6 \geq 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 6 = 9 + 24 = 33$

$m_1 = \frac{3-\sqrt{33}}{-2} = \frac{\sqrt{33}-3}{2} \qquad m_2 = \frac{3+\sqrt{33}}{-2} = -\frac{3+\sqrt{33}}{2}$ Otrzymujemy: $m \in \left(-\frac{3+\sqrt{33}}{2};\ \ \frac{\sqrt{33}-3}{2}\right)$

Teraz aby dać odpowiedź trzeba ustalić cześć wspólną odpowiedzi I; II i III.

Odpowiedź: $m \in [(-2;\ \ 0) \cup (1;\ \ +\infty)] \cap \left(-\frac{3+\sqrt{33}}{2};\ \ \frac{\sqrt{33}-3}{2}\right) \wedge \ m \neq -1 \Leftrightarrow$

$m \in (-2;\ -1) \cup (-1;\ \ 0) \cup \left(1;\ \frac{\sqrt{33}-3}{2}\right)$

Zad 14. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 272$ ciąg geometryczny oraz $a_3 = a_1 + 48$ skąd otrzymujemy:

$a_1 + 48 = a_1 \cdot q^2$

Natomiast z faktu że to ciąg geometryczny mamy $a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 = 272$

Mamy więc układ równań:

$\begin{cases} a_1 + 48 = a_1 \cdot q^2 \\ a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 = 272 \end{cases}$ Wyznaczmy z I równania a_1

$a_1 - a_1 \cdot q^2 = -48$

$a_1(1 - q^2) = -48 | : (1 - q^2)$

$a_1 = \frac{-48}{1-q^2} = \frac{48}{q^2-1}$ Wstawmy to za a_1 do II równania

$\frac{48}{q^2-1} + \frac{48}{q^2-1} \cdot q + \frac{48}{q^2-1} \cdot q^2 + \frac{48}{q^2-1} q^3 = 272 | \cdot (q^2 - 1); q \neq 1\ q \neq -1$ (z założenia wynika że ciąg nie jest stały)

$48 + 48q + 48q^2 + 48q^3 = 272(q^2 - 1)$

$48 + 48q + 48q^2 + 48q^3 = 272q^2 - 272$

$48q^3 + 48q^2 + 48q - 272q^2 + 48 + 272 = 0$

$48q^3 - 224q^2 + 48q + 320 = 0 | : 16$

$3q^3 - 14q^2 + 3q + 20 = 0$ widzimy że równanie spełnia $q = -1$

Spr: $3(-1)^3 - 14(-1)^2 + 3(-1) + 20 = 3 \cdot (-1) - 14 \cdot 1 - 3 + 20 = -3 - 14 - 3 + 20 = -20 + 20 = 0$

Podzielimy wielomian $3q^3 - 14q^2 + 3q + 20$ metodą Hornera przez dwumian $q + 1$

	3	- 14	3	20
obliczenia		$3 \cdot (-1) - 14 = -17$	$-17 \cdot (-1) + 3 = 20$	$-1 \cdot 20 + 20 = 0$
pierwiastek -1	3	- 17	20	

Otrzymaliśmy wielomian $3q^2 - 17q + 20$ Czyli mamy do rozwiązania $3q^2 - 17q + 20 = 0$

$\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 20 = 289 - 240 = 49$ $\sqrt{49} = 7$

$q_1 = \frac{17-7}{2 \cdot 3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ $q_2 = \frac{17+7}{2 \cdot 3} = \frac{24}{6} = 4$

Dla $q = \frac{5}{3}$ mamy: $a_1 = \frac{48}{q^2-1} = \frac{48}{\left(\frac{5}{3}\right)^1 - 1} = \frac{48}{\frac{25}{9} - 1} = \frac{48}{\frac{16}{9}} = 48 \cdot \frac{9}{16} = 27$ $a_2 = 27 \cdot \frac{5}{3} = 9 \cdot 5 = 45$

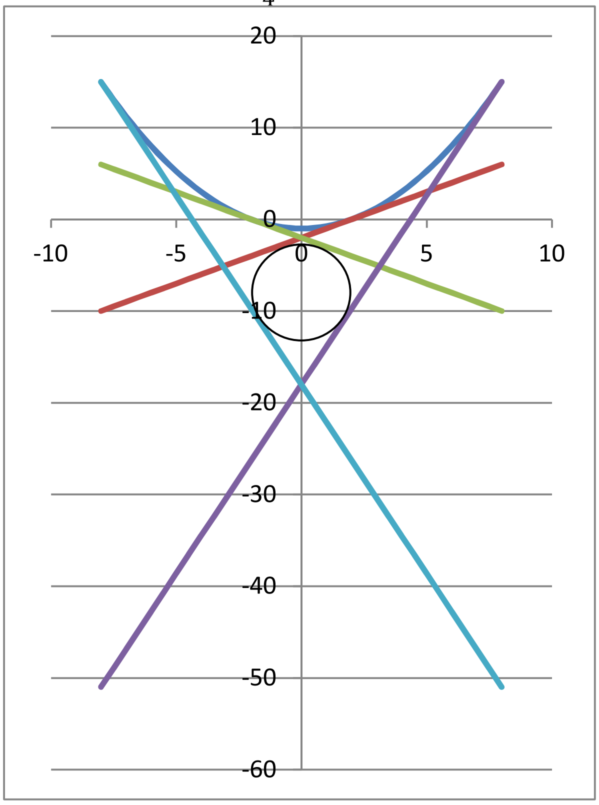
$a_3 = 45 \cdot \frac{5}{3} = 15 \cdot 5 = 75$ $a_4 = 75 \cdot \frac{5}{3} = 25 \cdot 5 = 125$

Liczby te spełniają podany warunek $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 27 + 45 + 75 + 125 = 272$

Dla $q = 4$ mamy: $a_1 = \frac{48}{q^2-1} = \frac{48}{4^2-1} = \frac{48}{16-1} = \frac{48}{15} = 3\frac{1}{5}$ Już widzimy że wyrazy ciągu nie będą liczbami całkowitymi więc nie spełniają warunków zadania.

Odpowiedź: Liczby spełniające warunki zadania to $\{27;\ \ 45;\ \ 75;\ \ 125\}$

Zad 15. parabola $y=\frac{1}{4}x^2-1$ i okrąg $x^2+(y+6)^2=8$ $\quad S=(0;\ -6)\quad r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$



Punkt styczności leży na paraboli $y=\frac{1}{4}x^2-1$
Prosta której szukamy ma postać $y=ax+b$
Aby prosta z parabolą miała punkty wspólne musi zachodzić związek
$\frac{1}{4}x^2-1=ax+b$ czyli $\frac{1}{4}x^2-ax-1-b=0$
Powstało nam równanie kwadratowe więc gdy $\Delta=0$ to równanie to będzie miało jedno rozwiązanie, czyli prosta będzie styczna do paraboli.
$\frac{1}{4}x^2-ax-1-b=0$
$\Delta=(-a)^2-4\cdot\frac{1}{4}\cdot(-1-b)=a^2+b+1$
$\Delta=0$ czyli: $\boldsymbol{a^2+b+1=0}$
Teraz korzystając z faktu że prosta ta ma być styczna do okręgu $x^2+(y+6)^2=8$
mamy że musi ona przechodzić w odległości $r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ od środka okręgu $S=(0;\ -6)$
Prosta $y=ax+b$ w postaci ogólnej będzie miała postać $ax-y+b=0$
czyli mamy $A=a;\qquad B=-1;\qquad C=b$
$d=\frac{|a\cdot 0+(-1)\cdot(-6)+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$ czyli $\boldsymbol{\frac{|6+b|}{\sqrt{a^2+1}}=2\sqrt{2}}$
Mamy więc do rozwiązania układ równań:
$\begin{cases}a^2+b+1=0\\ \frac{|6+b|}{\sqrt{a^2+1}}=2\sqrt{2}\end{cases}$ wyznaczamy z I równania $a^2=-b-1$ i wstawiamy do II
$\frac{|6+b|}{\sqrt{-b-1+1}}=2\sqrt{2}$ czyli $\frac{|6+b|}{\sqrt{-b}}=2\sqrt{2}|\cdot\sqrt{-b}$
$|6+b|=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{-b}$
Ze względu na wartość bezwzględną wypadałoby rozpatrzyć 2 przypadki
$6+b=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{-b}\quad\vee\quad 6+b=-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{-b}$ po podniesieniu do kwadratu mamy
$(b+6)^2=8\cdot(-b)$ (Trzeba zauważyć że $\left(2\sqrt{2}\right)^2=\left(-2\sqrt{2}\right)^2=8$)
$b^2+12b+36=-8b\qquad b^2+12b+36+8b=0$
$b^2+20b+36=0$
$\Delta=20^2-4\cdot1\cdot36=400-144=256\qquad\sqrt{256}=16$

$b_1 = \frac{-20-16}{2} = -\frac{36}{2} = -18$ $\qquad$ $b_2 = \frac{-20+16}{2} = -\frac{4}{2} = -2$

Dla $b = -18$ mamy: $a^2 = -b - 1$ $\;a^2 = -(-18) - 1 = 18 - 1 = 17$

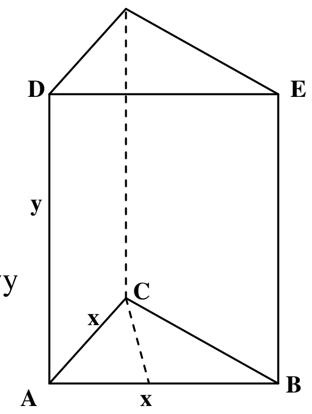
$a = \pm\sqrt{17}$ $\qquad a_1 = \sqrt{17}$ $\qquad a_2 = -\sqrt{17}$

Dla $b = -2$ mamy: $a^2 = -b - 1$ $\;a^2 = -(-2) - 1 = 2 - 1 = 1$

$a = \pm\sqrt{1}$ $\qquad a_3 = \sqrt{1} = 1$ $\qquad a_4 = -\sqrt{1} = -1$

Odpowiedź: zadanie ma 4 rozwiązania. Proste spełniające warunki zadania to:

$y = \sqrt{17}x - 18$ $\qquad y = -\sqrt{17}x - 18$ $\qquad$ y = x − 2 $\qquad$ y = −x − 2



Zad 16. W graniastosłupie mamy dane $x + x + y = S$ gdzie:

x – krawędź podstawy y – krawędź boczna.

$y = S - 2x$ – wysokość graniastosłupa $\quad h_p = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ – wysokość podstawy

Mamy obliczyć objętość tego graniastosłupa więc:

$V = P_p \cdot h = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h_p \cdot h = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot (S - 2x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot (S - 2x)$

Mamy więc wzór na objętość jako funkcję zmiennej x:

$V(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot (S - 2x) = \frac{x^2\sqrt{3}(S-2x)}{4} = \frac{S\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x^3}{4} = \frac{S\sqrt{3}x^2}{4} - \frac{2\sqrt{3}x^3}{4} = \frac{S\sqrt{3}x^2}{4} - \frac{\sqrt{3}x^3}{2}$

$D = \left(0;\ \frac{S}{2}\right)$ (wymiary krawędzi nie mogą być liczbami ujemnymi)

Obliczamy pochodną funkcji w celu poszukiwania ekstremum

$V'(x) = 2 \cdot \frac{S\sqrt{3}}{4}x - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{S\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}\sqrt{3}x^2$

$\frac{S\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}\sqrt{3}x^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x\left(\frac{S\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}x\right) = 0$

$x = 0 \qquad \vee \qquad \frac{S\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}x = 0$

$x = 0 \qquad x \notin D$ krawędź graniastosłupa nie może być zero.

$\frac{S\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{3}{2}\sqrt{3}x = \frac{S\sqrt{3}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{S\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{S}{3}$

Dla $x = \frac{S}{3}$ mamy maksimum gdyż dla $V'(x) = \frac{S\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}\sqrt{3}x^2$ jak wstawimy $x < \frac{S}{3}$ to otrzymamy $\frac{S\sqrt{3}}{2}x > \frac{3}{2}\sqrt{3}x^2$ czyli $V'(x) > 0$ a jak wstawimy $x > \frac{S}{3}$ to otrzymamy $\frac{S\sqrt{3}}{2}x < \frac{3}{2}\sqrt{3}x^2$ czyli $V'(x) < 0$

Teraz obliczymy objętość graniastosłupa dla $x = \frac{S}{3}$ $\qquad y = S - 2x = S - 2 \cdot \frac{S}{3} = S - \frac{2S}{3} = \frac{S}{3}$

$V = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot (S - 2x) = \frac{\left(\frac{S}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(S - 2 \cdot \frac{S}{3}\right) = \frac{\frac{S^2\sqrt{3}}{9}}{4} \cdot \frac{S}{3} = \frac{S^2\sqrt{3}}{36} \cdot \frac{S}{3} = \frac{S^3\sqrt{3}}{108}$

Odpowiedź: Wymiary tego graniastosłupa to:

$x = \frac{S}{3}$ – krawędź podstawy $y = \frac{S}{3}$ – krawędź boczna czyli wysokość, a objętość wynosi $V = \frac{S^3\sqrt{3}}{108}$