Operon Listopad 2018

Zadania zamknięte

1) $49^{-6}:7^{-15}=(7^2)^{-6}:7^{-15}=7^{-12}:7^{-15}=7^{-12-(-15)}=7^3$ **(B)**

2) $\log_3$ (log 30–log 3)= $\log_3\left(\log\frac{30}{3}\right)=\log_3\log 10=\log_3 1=0$ **(B)**

3) $\frac{3}{\sqrt{6}-3}=\frac{3(\sqrt{6}+3)}{(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+3)}=\frac{3(\sqrt{6}+3)}{6-9}=\frac{3(\sqrt{6}+3)}{-3}=-(\sqrt{6}+3)=-\sqrt{6}-3$ **(B)**

4) 235,40 zł ≈ 240 zł. 240 – 235,40 = 4,60 błąd bezwzględny.
$\frac{4,6}{235,40}\cdot 100\%\approx 1,95\%$ błąd względny **(B)**

5) $2-2(\sqrt{3}-1)^2=2-2(3-2\sqrt{3}+1)=2-6+4\sqrt{3}-2=4\sqrt{3}-6\approx 0,93$ **(D)**

6) $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x<\frac{1}{6}\quad|\cdot 6$
$2-3x<1$
$-3x<1-2\ \Rightarrow\ -3x<-1$
po podzieleniu przez (-3) $x>\frac{1}{3}$ **(A)**

7) $\frac{3x(x^2-9)}{x-3}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{3x(x-3)(x+3)}{x-3}=0\quad\Rightarrow\quad 3x(x+3)=0$
dwa pierwiastki $x=0\ \vee\ x=-3$ **(C)**

8) Funkcja jest rosnąca czyli wykres idzie do góry dla $x\in\langle -3;0\rangle$ **(D)**

9) $f(x)=\frac{8-3x}{2}$ czyli $f(x)=\frac{8}{2}-\frac{3x}{2}$ dalej $f(x)=4-1\frac{1}{2}x$ albo $f(x)=-1\frac{1}{2}x+4$ mamy więc funkcję malejącą o współczynniku kierunkowym $a=-1\frac{1}{2}$ oraz b = 4 czyli wykres przecina oś OY w punkcie 4. Rozwiązując równanie $-1\frac{1}{2}x+4=0$ obliczamy miejsce zerowe $x=2\frac{2}{3}$. Tak więc szukany trójkąt ma wysokość h = 4 oraz podstawę $a=2\frac{2}{3}$ $\quad P=\frac{1}{2}a\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{3}\cdot 4=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot 4=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$
(B)

10) $f(x)=-(x+7)(x-3)$ minus przed nawiasem uświadamia nas że wykres tej funkcji jest gałęziami do dołu więc odpowiedź (C) jest wykluczona.
$-(x+7)(x-3)=-(x^2-3x+7x-21)=-x^2-4x+21$ czyli
$f(x)=-x^2-4x+21\quad(a=-1,\quad b=-4,\quad c=21)$ Wystarczy obliczyć teraz drugą współrzędną wierzchołka paraboli czyli $q=\frac{-\triangle}{4a}=\frac{-((-4)^2-4\cdot(-1)\cdot 21)}{4\cdot(-1)}=\frac{-(16+84)}{-4}=\frac{-100}{-4}=25$, czyli zbiór wartości to $(-\infty,\quad 25)$ **(A)**

11) $f(x)=-3^x$ przesunięcie w prawo o 2 jednostki powoduje zmiana zmiennej x we wzorze o -2 czyli
$g(x)=-3^{x-2}$ **(D)**

12) a_n=–2n+2018 Rozwiążmy nierówność $-2n+2018>0$ czyli $-2n>-2018$ co po podzieleniu przez (-2) daje $n<1009$ czyli wyrazów jest 1008 (C)

13) Ciąg 4, 6, 9… łatwo zauważyć że to geometryczny bo 6:4= 1,5 oraz 9:6=1,5 czyli q=1,5=$\frac{3}{2}$ teraz ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego mamy: $S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}=4\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1-\frac{3}{2}}=4\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{-\frac{1}{2}}=-8\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)=8\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right)$
[Chcąc odpowiedź zgadnąć podstawiając odpowiednie liczby do wybranego wzoru to trzeba podstawiać liczby **4**, (4+6=**10**), (4+6+9=**19**)] **(C)**

14) $a_1+a_2=5\frac{1}{2}\quad a_1+a_2+a_3=12\quad a_1=a\qquad r-\textit{różnica w ciągu arytm}$ otrzymamy

$$\begin{cases} a+a+r=5\frac{1}{2}\\ a+a+r+a+r+r=12\end{cases}$$

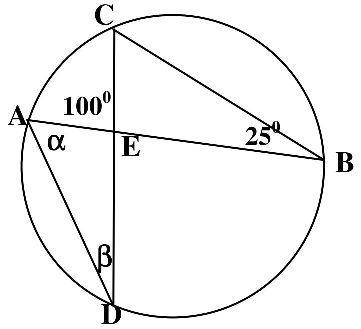
$\begin{cases} 2a + r = 5\frac{1}{2} \\ 3a + 3r = 12 \end{cases}$

dzieląc drugie równanie przez 3 mamy a + r = 4 (drugi wyraz)a odejmując to od pierwszego równania otrzymujemy $a = 5\frac{1}{2} - 4 = 1\frac{1}{2}$ (pierwszy wyraz) **(A)**

15) $\tan\frac{\alpha}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ stąd $\frac{\alpha}{3} = 30^0$ czyli $\alpha = 3 \cdot 30^0 = 90^0$ **(C)**

16) $h = 12cm$ $P = 180$ $P = a \cdot h$ to $a = \frac{P}{h} = \frac{180}{12} = 15$ teraz z uwagi na to że w rombie wszystkie boki równe więc $\sin\alpha = \frac{h}{a} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0{,}8$ **(D)**

17)



kąt β ma 25^0 bo jest oparty na łuku AC tak samo jak 25^0. W trójkącie **ADE** kąt przy wierzchołku **E** ma $180^0 - 100^0 = 80^0$. (z sumy kątów przyległych)

teraz z sumy kątów w trójkącie $\alpha + \beta = 180^0 - 80^0 = 100^0$. **(C)**

18) W godzinie mamy 3razy 20 minut czyli liczba bakterii trzykrotnie się podwaja czyli $K \cdot 2^3$ teraz po n godzinach $K \cdot 2^{3n}$ **(A)**

19) A = (1, –3) C = (–5, 3)

$|AC| = \sqrt{(-5-1)^2 + \left(3-(-3)\right)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}$ długość przekątnej kwadratu.

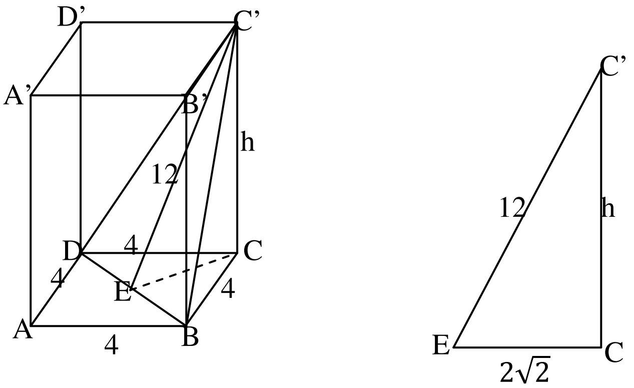
Jeżeli przekątna ma długość $6\sqrt{2}$ to bok ma 6 (wzór na przekątną $d = a\sqrt{2}$) **(D)**

20) Na pierwszym miejscu liczby może być do wyboru 9 cyfr od 1 do 9. Następnie na drugim tylko 8 z nich ale może też być 0 więc znowu dziewięć. Potem na trzecim tylko 8 a na czwartym 7 bo zadanie zakłada że się nie powtarzają. Czyli ostatecznie $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ **(A)**

21) Przy trzykrotnym rzucie monetą wszystkich możliwych wyników jest 8 $(2^3 = 8)$ Aby była jedna reszka to wyniki muszą zawierać się w zbiorze (r o o) (o r o) (o o r). Tak więc $P(A) = \frac{3}{8}$ **(B)**

22) Są liczby 5, 8, 1, 3, x, 8 i średnia wynosi 6. Mamy zatem $\frac{5+8+1+3+x+8}{6} = 6$ dalej $\frac{25+x}{6} = 6$ czyli$25 +$ li$25 + x = 36$ stąd x = 11. Zbiór po uporządkowaniu przyjmuje postać: 1, 3, 5, 8, 8, 11. Mediana będzie więc średnią liczb 5 i 8 czyli 6,5 **(B)**

23)



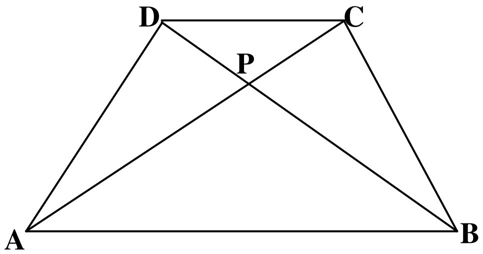
Jeżeli bok kwadratu a = 4cm to przekątna $d = 4\sqrt{2}$ a jej połowa czyli odcinek $EC = 2\sqrt{2}$ teraz z twierdzenia Pitagorasa $h = \sqrt{12^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{144 - 8} = \sqrt{136} = \sqrt{4 \cdot 34} = 2\sqrt{34}$ **(C)**

24) Ob kuli $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}6^3\pi = \frac{4 \cdot 216}{3}\pi = 288\pi$ walec $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot 4{,}5 = 288\pi$ Stąd po podzieleniu przez $4{,}5\pi$ otrzymamy $r^2 = 64$ czyli r = 8 czyli średnica d = 16 **(C)**

<u>Zadania otwarte</u>

25) $(2x - 5)(3 - x) > -66$
$6x - 2x^2 - 15 + 5x > -66$
$-2x^2 + 11x - 15 + 66 > 0$
$-2x^2 + 11x + 51 > 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 11^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 51 = 121 + 408 = 529$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{529} = 23$
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11-23}{2\cdot(-2)} = \frac{-34}{-4} = 8\frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11+23}{2\cdot(-2)} = \frac{12}{-4} = -3$ wykres skierowany gałęziami do dołu więc wartości dodatnie dla $x \in (-3;\ 8)$

26)



Dane są dł odcinków |AP| = 8 |PC| = 3 |BP| = 12 oraz różnica podstaw |AB| - |DC| = 15 Jest dość oczywiste że trójkąty APB i CDP są podobne bo mają takie same kąty. Ich skala podobieństwa to $k = \frac{PC}{AP} = \frac{3}{8}$ tak samo $\frac{PD}{BP} = \frac{3}{8}$ czyli $PD = \frac{12\cdot 3}{8} = 4{,}5$. Oznaczmy |DC| = x to |AB| = x+15. Z podobieństwa trójkątów mamy $\frac{x}{x+15} = \frac{3}{8}$ mnożąc na krzyż $8x = 3(x + 15)$
$8x = 3x + 45$
$5x = 45$
x = 9 czyli |DC| = 9 oraz |AB| = 9 + 15 = 24

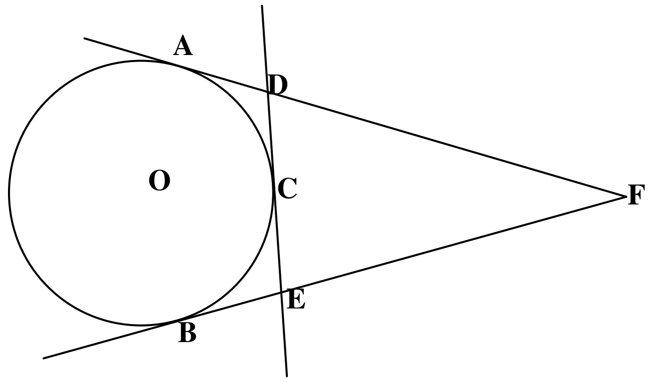
27) $\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 - \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 = a^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 - \left(a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2\right) = a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 - a^2 + ab - \frac{1}{4}b^2 = 2ab$ Jeżeli teraz założymy że ***a*** i ***b*** są kolejnymi liczbami naturalnymi to mamy iloczyn $2 \cdot n \cdot (n + 1)$ dwójki oraz dwóch kolejnych liczb. Z liczb ***n*** i (***n+1***) jedna jest parzysta. Z tego wynika że cały iloczyn dzieli się przez 4.

28) $\sin^2\alpha = \frac{9}{25}$
Z jedynki trygonometrycznej $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ mamy $\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ tak więc $\sin\alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$ (II ćwiartka – kąt rozwarty) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

29) $f(x) = -3x^2 + bx + c$ x = 2 oś symetrii oraz $x \in (-\infty;\ 21\rangle$ zbiór wartości. Znając definicję współrzędnych wierzchołka paraboli widzimy że *p* = 2 *q* = 21 oraz punkt $(2;\ 21)$ leży na wykresie. Czyli zgodnie ze wzorami na *p* i *q* mamy $\frac{-b}{2a} = 2$

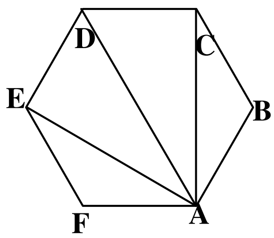
$\frac{-\Delta}{4a} = 21$ a jest dane $a = -3$ $\frac{-b}{2\cdot(-3)} = 2$ czyli $\frac{-b}{-6} = 2$ więc $b = 12$. Podstawiając teraz do wzoru funkcji współrzędne wierzchołka $(2;\ \ 21)$ otrzymujemy równanie $21 = -3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + c$
$21 = -12 + 24 + c \implies c = 9$
Odpowiedź $f(x) = -3x^2 + 12x + 9$

30)



Na rysunku jest trzy proste i każda jest styczna do okręgu. Odcinki na prostych stycznych mające wspólny początek w punkcie przecięcia prostych a końce w punktach styczności są równe. Czyli |FA| = |FB|, |DA| = |DC|, |EB| = |EC|. Szukany obwód trójkąta DEF = |FD| + |DC| + |EC| + |EF| = |FD| + |DA| + |EB| + |EF| = |FA| + |FB| = x + x =2x

31)



Z każdego wierzchołka wychodzi pięć odcinków: dwa boki o długości 1 i trzy przekątne. W tym dłuższa przekątna |AD| = 2 a krótsze przekątne |AE| = |AC| = $\sqrt{3}$ Ilość wszystkich przekątnych $\overline{\overline{\Omega}} = \frac{6\cdot5}{2} = \frac{30}{2} = 15$ (dzielenie przez 2 jest po to aby nie liczyć każdej przekątnej dwukrotnie, z jednego i drugiego końca) Przekątne o długości niewymiernej (z każdego wierzchołka wychodzi 2) $\overline{\overline{A}} = \frac{6\cdot2}{2} = 6$ Szukane prawdopodobieństwo $P(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

32) (4*a*–5; *a*; *b*; *b*+2; 9) Z ciągu arytmetycznego $\frac{a_1+a_3}{2} = a_2$ czyli $\frac{4a-5+b}{2} = a$ Natomiast z ciągu geometrycznego (b, b + 2, 9) wiedząc, że $a_1 \cdot a_3 = (a_2)^2$ czyli $b \cdot 9 = (b+2)^2$. Na początek rozwiązujemy równanie wynikające z ciągu geometrycznego $b \cdot 9 = (b+2)^2$
$9b = b^2 + 4b + 4$
$b^2 - 5b + 4 = 0$
$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$ $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$
$b_1 = \frac{5-3}{2} = 1$ $b_2 \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$ $\frac{4a-5+b}{2} = a$ po pomnożeniu przez 2 otrzymujemy
$4a - 5 + b = 2a$ czyli $2a = 5 - b$ i ostatecznie $a = \frac{5-b}{2}$ teraz podstawiając ***b = 1*** otrzymamy
$a = 2$ Następnie dla ***b = 4*** $a = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$ Ostatecznie mamy dwie odpowiedzi:
1. Dla $a = 2\ i\ b = 1$ mamy $(3, 2, 1, 3, 9)$ $r = 2 - 3 = 1 - 2 = -1;$ $q = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = 3$
2. Dla $a = \frac{1}{2},\ b = 4$ mamy $\left(-3,\ \frac{1}{2},\ 4,\ 6,\ 9\right)$ $r = 3\frac{1}{2};$ $q = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

33) $A = (-9;\ \ 8)$ punkty *B* i *C* leżą na prostej $y = -2x + 38$. Wysokość z punktu *B* leży na prostej $3x + 2y - 61 = 0$. Podaj *B* i *C* oraz równanie prostej na której leży wysokość z C.

Z treści zadania wynika że punkt B leży na obu podanych prostych czyli rozwiązując układ równań $\begin{cases} y=-2x+38 \\ 3x+2y-61=0 \end{cases}$ otrzymamy współrzędne punktu B. Podstawiając I równanie $y=-2x+38$ do II równania otrzymamy $3x+2(-2x+38)-61=0$

$3x-4x+76-61=0$

$-x+15=0$

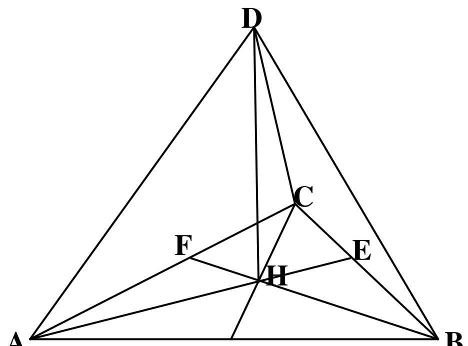
$x=15$ więc $y=-2x+38=-2\cdot 15+28=-30+38=8$ Stąd $B=(15;\ \ 8)$

Prosta $3x+2y-61=0$ w postaci kierunkowej ma wzór $y=-1{,}5x+30{,}5$ i jest prostopadła do prostej AC (wysokość jest prostopadła do podstawy). Współczynnik kierunkowy tej prostej $a_1=-1{,}5=-\frac{3}{2}$, więc prosta AC ma współczynnik kierunkowy $a_2=\frac{2}{3}$. Prosta AC przechodzi przez punkt $A=(-9;\ \ 8)$ więc podstawiając to do wzoru $y=ax+b$ mamy $8=\frac{2}{3}\cdot(-9)+b$ czyli $8=-6+b$ stąd $b=14$ Mamy więc wzór prostej AC $y=\frac{2}{3}x+14$. Teraz punkt C leży na otrzymanej prostej AC jak też na danej prostej $y=-2x+38$ Tak więc trzeba rozwiązać układ tych równań aby obliczyć współrzędne punktu C $\begin{cases} y=-2x+38 \\ y=\frac{2}{3}x+14 \end{cases}$ mamy więc

$\frac{2}{3}x+14=-2x+38 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{3}x+2x=38-14 \quad \frac{8}{3}x=24 \quad \Longrightarrow \quad 8x=72|:8 \quad \rightarrow \quad x=9$

wstawiając ten wynik np. do równania pierwszego otrzymamy $y=-2\cdot 9+38=-18+38=20$ punkt C ma współrzędne (9; 20). Punkty A = (-9; 8) B = (15; 8) czyli prosta AB jest równoległa do osi OX na wysokości y = 8. Wysokość wychodząca z punktu C jest do niej prostopadła więc prosta na której leży jest równoległa do osi OY i przechodzi przez C = (9; 20) czyli x = 9

34)



|AB| = |BC| = |AC| = 12 trójkąt równoboczny |AE| = |BF| = |CG| = $\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{12\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}=h_p$ wysokość podstawy (trójkąt równoboczny). Punkt przecięcia wysokości podstawy H dzieli je w stosunku 2 : 1 więc $|AH|=\frac{2}{3}\cdot 6\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ oraz $|HE|=\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. Zgodnie z treścią zadania przyjmujemy |DH| = x (wysokość ostrosłupa) oraz |DA| = 3x - krawędź boczna. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AHD mamy $\left(4\sqrt{3}\right)^2+x^2=(3x)^2 \quad \rightarrow \quad 16\cdot 3+x^2=9x^2 \quad \rightarrow \quad 8x^2=48 \quad \rightarrow \quad x^2=6 \quad \rightarrow$ $x=\sqrt{6}=H$ - wysokość ostrosłupa. Teraz z trójkąta HED obliczymy za pomocą twierdzenia Pitagorasa wysokość ściany bocznej ED = y. $y^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{6}^2 \quad \rightarrow \quad y^2=4\cdot 3+6 \quad \rightarrow \quad y^2=18$ $y=\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=3\sqrt{2}=h$ - wysokość ściany. $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\cdot h_p\cdot H=\frac{1}{6}\cdot 12\cdot 6\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}=12\sqrt{18}=12\sqrt{9\cdot 2}=12\cdot 3\sqrt{2}=36\sqrt{2}$ $P_b=3\cdot\frac{1}{2}a\cdot h=3\cdot\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 3\sqrt{2}=54\sqrt{2}$