Matura poprawkowa sierpień 2018r

Zadania zamknięte

Zad 1. 10% ceny początkowej to 2018zł czyli cała cena początkowa to $10 \cdot 2018zł = 20180zł$
Teraz po obniżce mamy 90% ceny początkowej czyli $20180zł - 2018zł = 18162zł$ **(B)**

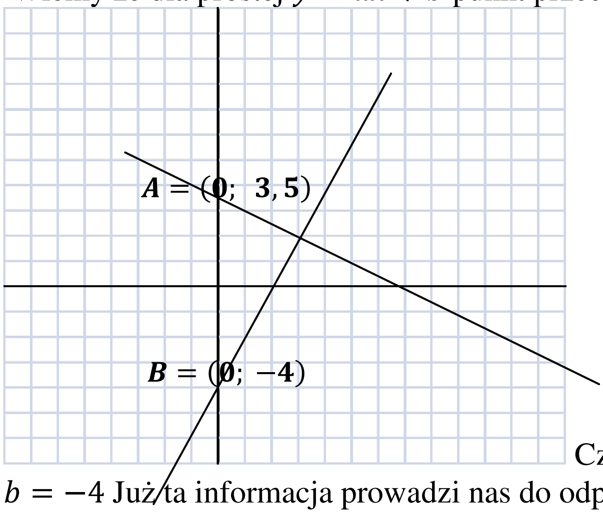
Zad 2. $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}}$ **(A)**

Zad 3. $x = 4{,}5 \cdot 10^{-8}$; $y = 1{,}5 \cdot 10^{2}$ $\frac{x}{y} = \frac{4{,}5\cdot 10^{-8}}{1{,}5\cdot 10^{2}} = \frac{4{,}5}{1{,}5} \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-2} = 3 \cdot 10^{-10}$ **(A)**

Zad 4. $\log_4 96 - \log_4 6 = \log_4 \frac{96}{6} = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$ **(D)**

Zad 5. $\left(a + 2\sqrt{3}\right)^2 = 13 + 4\sqrt{3}$
$\left(a + 2\sqrt{3}\right)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 2\sqrt{3} + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = a^2 + 4a\sqrt{3} + 4 \cdot 3 = 12 + a^2 + 4a\sqrt{3}$
widzimy że ma być $12 + a^2 = 13$ oraz $4a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ więc $a = 1$ **(B)**

Zad 6. Wiemy że dla prostej $y = ax + b$ punkt przecięcia z osią OY ma współrzędne $(0; \quad b)$



Czyli dane proste mają współczynniki $b = 3{,}5$ oraz $b = -4$ Już ta informacja prowadzi nas do odpowiedzi B **(B)**

Zad 7. $\frac{x-2}{3(x+2)} = \frac{1}{9}$ Wymnażając na krzyż mamy:
$9(x-2) = 3(x+2)$ $9x - 18 = 3x + 6$
$9x - 3x = 6 + 18$ $6x = 24|:6$ $x = 4$ **(C)**

Zad 8. $f(x) = 3^x$ $g(x) = f(-x)$ czyli $g(x) = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ Wystarczy wiedzieć że wszystkie funkcje wykładnicze przechodzą przez punkt $(0; \quad 1)$ **(C)**

Zad 9. $f(x) = 2\sqrt{3}x + b$ $A = \left(1; \quad \sqrt{3}\right)$ Po wstawieniu do wzoru funkcji współrzędnych punktu A mamy: $\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cdot 1 + b$ $b = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}$. **(D)**

Zad 10. $f(x) = x^2 - 2x - 11$ wierzchołek $\left(p = \frac{-b}{2a}; \quad f(p)\right)$
$p = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2\cdot 1} = 1$ $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 11 = 1 - 2 - 11 = -12$ wierzchołek $(1; \ -12)$ **(D)**

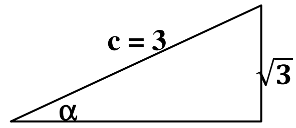
Zad 11. $f(x) = -3(x-2)(x-9)$ z postaci iloczynowej mamy $x_1 = 2$ $x_2 = 9$
$2 + 9 = 11$ **(A)**

Zad 12. $y = -(x-2)^2 + 4$ $x \in \langle 3; \quad 5\rangle$ Korzystając z postaci kanonicznej funkcji
$f(x) = a(x-p)^2 + q$ mamy że wierzchołek funkcji jest dla $p = 2$ $2 \notin \langle 3; \quad 5\rangle$
Wystarczy więc obliczyć $f(3) = -(3-2)^2 + 4 = -1 + 4 = 3$ **(D)**

Zad 13. $a_3 + a_4 + a_5 = 15$ czyli $a_1 + 2r + a_1 + 3r + a_1 + 4r = 15 \quad \Longrightarrow \quad 3a_1 + 9r = 15|:3$
$a_1 + 3r = 5 \quad \Longrightarrow \quad a_4 = 5$ **(A)**

Zad 14. $(x; \quad x+4; \quad 16)$ ciąg geometryczny
$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{x+4}{x}$ tak samo $q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{16}{x+4}$ Mamy więc proporcję: $\frac{x+4}{x} = \frac{16}{x+4}$
$(x+4)(x+4) = 16x \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 4x + 4x + 16 = 16x$
$x^2 + 8x - 16x + 16 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = 0$
Korzystając ze wzoru $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ mamy: $(x-4)^2 = 0$
czyli $x = 4$ **(B)**

Zad 15. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774$ To z tablic mamy $\alpha \approx 35°$

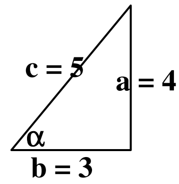


(C)

Zad 16. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ To korzystając z trójkąta Pitagorejskiego o bokach 3; 4; 5,

mamy $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ Teraz $\sin\alpha \cdot \tan\alpha = \sin\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{5} \cdot \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} =$

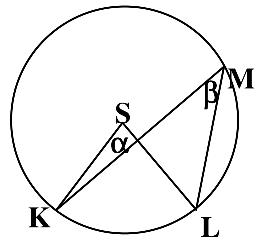
$= \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{16}{15}$



(A)

Zad 17. α - kąt środkowy β - kąt wpisany oparty na tym samym łuku

$\alpha = 2\beta$ mamy $\alpha + \beta = 114$ czyli $3\beta = 114 |:3$ $\beta = 38$



(B)

Zad 18. W równoległoboku mamy $\alpha + \beta = 180°$ i tu dodatkowo dane $\alpha - \beta = 80°$

$\begin{cases} \alpha + \beta = 180° \\ \alpha - \beta = 80° \end{cases}$ dodając równania $2\alpha = 260° |:2$ $\alpha = 130°$ **(C)**

Zad 19. $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ **(D)**

Zad 20. $y = (3m-4)x + 2$ $y = (12-m)x + 3m$

mają być równoległe czyli $3m - 4 = 12 - m$

$3m + m = 12 + 4$ $4m = 16 |:4$ $m = 4$ **(A)**

Zad 21. $A = (-3;\ 2)$ $M = (4;\ 1)$ M – środek odcinka AB

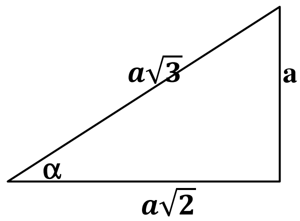
$|AM| = \sqrt{\left(4-(-3)\right)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$

tak więc $|AB| = 2 \cdot |AM| = 2 \cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ **(D)**

Zad 22. $\boldsymbol{a\sqrt{2}}$ - przekątna kwadratu (przekątna ściany sześcianu).

$\boldsymbol{a\sqrt{3}}$ - przekątna sześcianu

$\sin\alpha = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

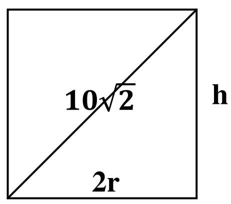


(D)

Zad 23. $10\sqrt{2} = a\sqrt{2}$ - przekątna kwadratu.

$2r = h = 10$ $r = 5$

$P_b = 2\pi r h = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10 = 100\pi$



(B)

Zad 24. Wypisując wszystkie oceny tego ucznia w kolejności od najmniejszej mamy:

2; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 6; 6 Jest 16 ocen a na środku są czwórki **(C)**

Zad 25. $\bar{\bar{\Omega}} = 29$

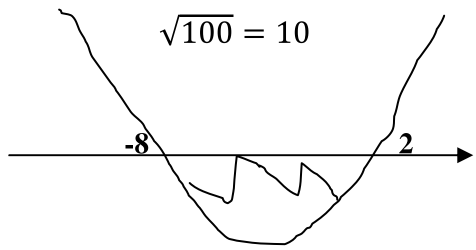
$\bar{\bar{A}} = 14$ $29 - 15 = 14$ $P(A) = \frac{14}{29}$ **(C)**

<u>Zadania otwarte</u>

Zad 26. $x^2 + 6x - 16 < 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100$ $\sqrt{100} = 10$

$x_1 = \frac{-6-10}{2\cdot 1} = \frac{-16}{2} = -8$ $x_2 = \frac{-6+10}{2\cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$



Odp: $x \in (-8;\ 2)$

Zad 27. $(x^3 + 27)(x^2 - 16) = 0$

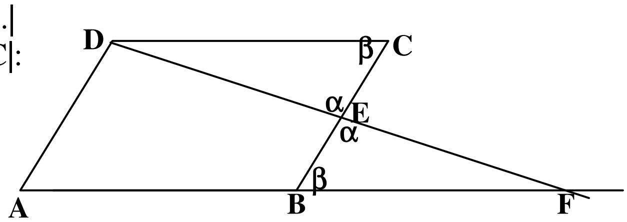
$x^3 + 27 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 16 = 0$

$x^3 = -27 \quad \vee \quad (x-4)(x+4) = 0$

$x_1 = \sqrt[3]{-27} = -3 \quad \vee \quad x - 4 = 0 \quad \vee \quad x + 4 = 0$

Odpowiedź: Mamy trzy rozwiązania $x_1 = -3$ $x_2 = 4$ $x_3 = -4$

Zad 28. Wystarczy wykazać że trójkąty CDE i BFE są przystające.|



Mamy dane że E jest środkiem odcinka BC czyli |BE| = |EC|:

$\sphericalangle BEF = \sphericalangle DEC = \alpha$ jako wierzchołkowe

$\sphericalangle EBF = \sphericalangle DCE = \beta$ kąty naprzemianległe

Teraz na podstawie cechy (kbk) trójkąty te są przystające

Stąd wniosek że odpowiednie boki |DC| = |BF|

Teraz z uwagi na to że czworokąt ABCD jest równoległobokiem i |DC| = |AB|

|AB| = |BF| czyli punkt B jest środkiem odcinka AF

Zad 29. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$ $a > 0; b > 0$ (drugi nawias sprowadzimy do wspólnego mianownika)

$(a+b)\left(\frac{1\cdot b}{a\cdot b}+\frac{1\cdot a}{b\cdot a}\right) \geq 4$ czyli$(a+b)\left(\frac{b+a}{a\cdot b}\right) \geq 4$ Mamy więc

$\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4| \cdot ab$ można pomnożyć przez ab korzystając z założenia że są to liczby dodatnie

$(a+b)^2 \geq 4ab$ po podniesieniu lewej strony do potęgi

$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \quad \Longrightarrow \quad a^2 + 2ab - 4ab + b^2 \geq 0$ i ostatecznie

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ czyli $(a-b)^2 \geq 0$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby a i b jako kwadrat dowolnej liczby.

Zad 30. Ciąg arytmetyczny oraz $a_9 = a_1 + 8r = 34$

$S_8 = \frac{2a_1+(8-1)r}{2} \cdot 8 = 110$

Mamy więc układ równań: $\begin{cases} a_1 + 8r = 34 \\ \frac{2a_1+7r}{2} \cdot 8 = 110 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 + 8r = 34 \\ (2a_1 + 7r) \cdot 4 = 110 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + 8r = 34 \\ 8a_1 + 28r = 110|:2 \end{cases}$

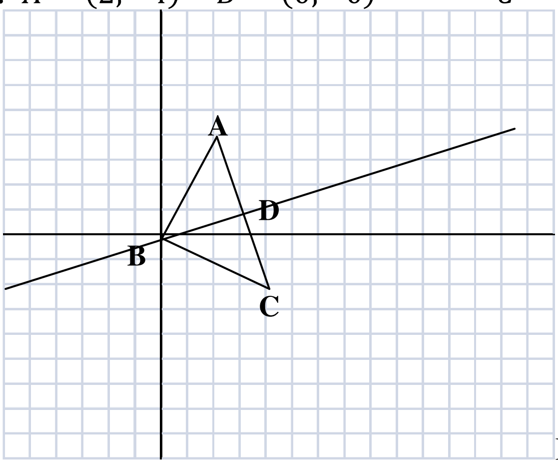
$\begin{cases} a_1 = 34 - 8r \\ 4a_1 + 14r = 55 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = 34 - 8r \\ 4(34 - 8r) + 14r = 55 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 = 34 - 8r \\ 136 - 32r + 14r = 55 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = 34 - 8r \\ -18r = 55 - 136 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = 34 - 8r \\ -18r = -81|:(-18) \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 = 34 - 8 \cdot 4{,}5 \\ r = 4{,}5 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = 34 - 36 \\ r = 4{,}5 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = -2 \\ r = 4{,}5 \end{cases}$

Odpowiedź: Pierwszy wyraz ciągu $a_1 = -2$ a różnica $r = 4{,}5$.

Zad 31. $A = (2;\ 4) \quad B = (0;\ 0) \quad C = (4;\ -2)$



D jest środkiem odcinka AC więc

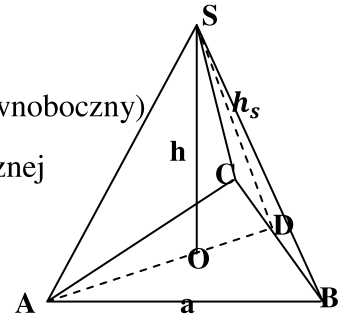
$x = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad y = \frac{4+(-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad D = (3;\ 1)$

Teraz trzeba napisać równanie prostej BD. Jak jest dane przechodzi przez punkt $B = (0;\ 0)$ więc przecina oś OY w punkcie 0 czyli dla prostej $y = ax + b$ $b = 0$

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$

Odpowiedź: Prosta BD posiada równanie $y = \frac{1}{3}x$.

Zad 32. a - krawędź podstawy $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ - pole podstawy (trójkąt równoboczny)

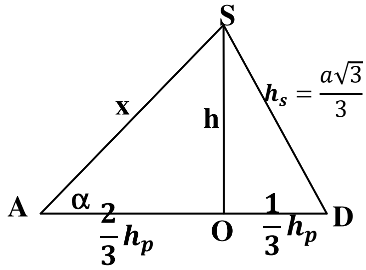


$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ gdzie h_s wysokość ściany bocznej

$\frac{3}{2} a h_s = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \,|\cdot 2 \quad \Longrightarrow \quad 3ah_s = a^2\sqrt{3}|: a$

$3h_s = a\sqrt{3} \qquad h_s = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Teraz korzystając z przekroju ostrosłupa wzdłuż krawędzi AS wysokości podstawy h_p i wysokości h_s ściany BCS mamy:



$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{1}{3} h_p = \frac{a\sqrt{3}}{6} \qquad \frac{2}{3} h_p = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Teraz z trójkąta prostokątnego DSO

$\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \qquad \frac{3a^2}{36} + h^2 = \frac{3a^2}{9}$

$h^2 = \frac{12a^2}{36} - \frac{3a^2}{36} = \frac{9a^2}{36} \qquad h = \sqrt{\frac{9a^2}{36}} = \frac{3a}{6} = \frac{a}{2}$

Teraz korzystając z trójkąt prostokątnego AOS obliczymy AS = x

$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = x^2 \qquad x^2 = \frac{3a^2}{9} + \frac{a^2}{4} = \frac{12a^2+9a^2}{36} = \frac{21a^2}{36}$

$x = \sqrt{\frac{21a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$

$\cos\alpha = \frac{\frac{2}{3}h_p}{x} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{21}}{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{6}{a\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = 2\sqrt{\frac{3}{21}} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

Odpowiedź Kosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy wynosi $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

Zad 33. $A = \{-3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3\} \quad B = \{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}\ y = ax + b$

Ilość wszystkich wzorów funkcji jakie można wylosować gdy $a \in A$; $\quad b \in b$ to:

$\overline{\overline{\Omega}} = 6 \cdot 4 = 24$

A - zbiór funkcji rosnących z dodatnim miejscem zerowym. Takich funkcji jest tylko 3 bo

$a \in \{1;\ \ 2;\ \ 3\} \qquad b \in \{-1\}$ czyli to są funkcje o wzorach:

$y = x - 1; \qquad y = 2x - 1; \qquad y = 3x - 1; \quad \overline{\overline{A}} = 3$

$P(A) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

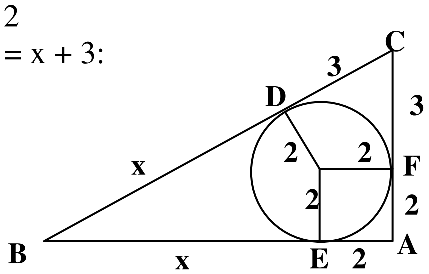
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym że funkcja jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe wynosi $\frac{1}{8}$

Zad 34. Wprowadzając oznaczenia jak na rysunku mamy: D, E, F – punkty styczności okręgu z trójkątem.

|BD| = |BE| = x $\qquad$ |CD| = |CF| = 3 $\quad$ oraz |AE| = |AF| = 2

Czyli boki trójkąta mają długości: |AC| = 5; |AB| = x+2; |BC| = x + 3:

Z twierdzenia Pitagorasa mamy:



$5^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2$

$25 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 6x + 9$

$x^2 - x^2 + 4x - 6x = 9 - 25 - 4$

$-2x = -20|:(-2)$

$x = 10$

$AB = 10 + 2 = 12$

$P = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$

Odpowiedź: Pole trójkąta wynosi 30.