Zadania zamknięte

Zad 1. $x = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \qquad y = \sqrt{2} - 1$

$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + 1 - (\sqrt{2} - 1)\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 =$

$\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 = (2)^2 = 4$ **(A)**

Zad 2. $a = \log_{\frac{1}{2}} 8 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^a = 8 \qquad a = -3$

$b = \log_4 8 \qquad 4^b = 8 \qquad (2^2)^b = 8 \qquad 2^{2b} = 2^3 \qquad 2b = 3 \qquad b = 1{,}5$

$c = \log_4 \frac{1}{2} \qquad 4^c = \frac{1}{2} \qquad 2^{2c} = 2^{-1} \qquad 2c = -1 \qquad c = -\frac{1}{2}$

$a < c < b$ lub inaczej $b > c > a$ **(D)**

Zad 3. $(4-x)(x+3)(x+4) > 0$

pierwiastki równania: $x_1 = 4 \qquad x_2 = -3 \qquad x_3 = -4$

Z uwagi na pierwszy nawias gdzie x ma znak „**–**„

Tak więc $\lim_{x\to+\infty}(4-x)(x+3)(x+4) = -\infty$. Rozwiązania nierówności są w przedziałach:

$x \in (-3;\ \ 4) \cup (-\infty;\ \ -4)$ to liczna – 2 leży w przedziale $(-3;\ \ 4)$ **(D)**

Zad 4. **x** – cena początkowa komputera

$0{,}9 \cdot 0{,}9x = 1944 \qquad 0{,}81x = 1944 \qquad x = \frac{1944}{0{,}81} = 2400$ **(C)**

Zad 5. Najłatwiej zauważyć że pierwszą liczba całkowitą tego przedziału jest **–** 9 i sumując kolejne liczby całkowite do 9 otrzymamy 0 $[-9 + (-8) + (-7) + \cdots + 0 + 1 + 2 + \cdots + 8 + 9) = 0]$. Następnie jako oczywiste jest że $10 + 11 = 21$. Czyli ostatnia liczba tego przedziału to 11 **(B)**

Zad 6. $x - \frac{1}{2x+1} = 0$ Sprowadźmy lewą stronę do wspólnego mianownika

$\frac{x(2x+1)}{2x+1} - \frac{1}{2x+1} = 0 \qquad x \neq -\frac{1}{2}$

$\frac{2x^2+x-1}{2x+1} = 0$

$2x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2(-1) = 1 + 8 = 9 \qquad \sqrt{9} = 3$

$x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1 \qquad x_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ **(A)**

Zad 7. $\frac{224}{1111} = 0,(2016)$ Mamy ułamek okresowy z okresem czterocyfrowym. $20:4 = 5$. Czyli jak zapiszemy 20 cyfr po przecinku to będzie dokładnie 5 pełnych okresów, czyli 6 będzie na końcu **(D)**

Zad 8. $\frac{8^{20}-2\cdot4^{20}}{2^{20}\cdot4^{10}} = \frac{(2^3)^{20}-2\cdot(2^2)^{20}}{2^{20}\cdot(2^2)^{10}} = \frac{2^{60}-2\cdot2^{40}}{2^{20}\cdot2^{20}} = \frac{2^{60}-2^{41}}{2^{40}} = \frac{2^{40}(2^{20}-2)}{2^{40}} = 2^{20} - 2$ **(B)**

Zad 9. $f(x) = -2(x+2)^{-1}(x-3)^2 = -\frac{2(x-3)^2}{x+2}$

$f(2) = -\frac{2(2-3)^2}{2+2} = -\frac{2\cdot(-1)^2}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ **(B)**

Zad 10. $y = -(x-2)^2 + 4$ jak widać wierzchołek paraboli $(p;\ \ q) = (2;\ \ 4) \quad 2 \notin \langle 3;\ \ 5\rangle$ Tak więc trzeba obliczyć wartości funkcji na końcach podanego przedziału $\langle 3;\ \ 5\rangle$

$f(3) = -(3-2)^2 + 4 = -1 + 4 = 3$

$f(5) = -(5-2)^2 + 4 = -3^2 + 4 = -9 + 4 = -5$ **(B)**

Zad 11. $f(x) = (1-m^2)x + m - 1$ Aby funkcja liniowa nie miała miejsc zerowych musi spełniać dwa warunki: $a = 0\ \ czyli\ 1 - m^2 = 0$ aby wykres był równoległy do osi OX.

oraz $b \neq 0\ czyli\ m - 1 \neq 0$ aby wykres nie pokrywał się z osi OX

Pierwszy warunek spełnia dwie odpowiedzi A: $m = 1$ oraz C: $m = -1$ ale odpowiedź A nie spełnia drugiego warunku **(C)**

Zad 12. $f(x) = -(x-1)(3-x) = -[-(x-3)(x-1)] = (x-3)(x-1)$

Po przekształceniu do postaci ogólnej mamy $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Miejsca zerowe: $-(x-1)(3-x) = 0$

$(x-1) = 0\ \ \vee\ \ (3-x) = 0$

$x_1 = 1\ \ \vee\ \ x_2 = 3$ Mamy więc wykres gałęziami do góry i miejsca zerowe $x_1 = 1\ \ \vee\ \ x_2 = 3$ **(D)**

Zad 13. $3a_2 = 2a_3$ ciąg geometryczny o wyrazach dodatnich.

$3a_1q = 2a_1q^2 | : a_1q$

$3 = 2q \qquad \Longrightarrow \qquad q = \frac{3}{2}$ **(B)**

Zad 14. $a_n = 16 - \frac{1}{2}n \quad a_1 = 16 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 15\frac{1}{2} \qquad a_2 = 16 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 16 - 1 = 15$

$r = a_2 - a_1 = 15 - 15\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ **(B)**

Zad 15. $1 - \tan 40°$ korzystając z tablic trygonometrycznych mamy $\tan 40° \approx 0{,}8391$ więc mamy:

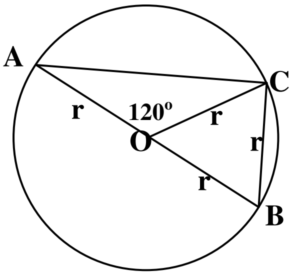
$1 - \tan 40° \approx 1 - 0{,}8391 = 0{,}1609 > 0{,}1$ **(C)**

Zad 16. Jeżeli AB – średnica to trójkąt ABC – prostokątny.

Warunki zadania mówią też że trójkąt BCO równoboczny

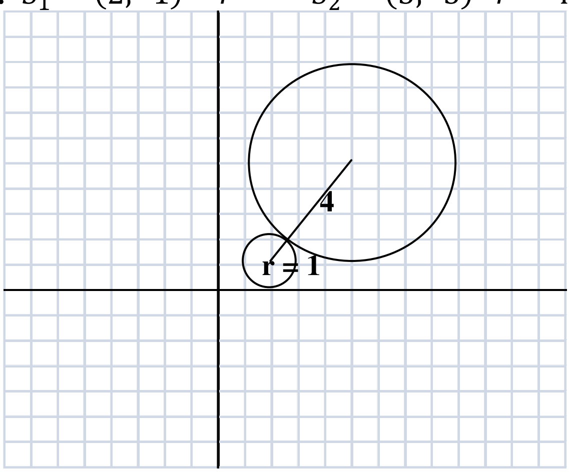
Tak więc trójkąt ACO równoramienny $\sphericalangle AOC = 120°$

$P_{ACO} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin 120° = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$



(D)

Zad 17. $S_1 = (2;\ 1) \quad r \qquad S_2 = (5;\ 5) \quad r = 4$



Obliczmy odległość między środkami czyli długość odcinka S_1S_2

$S_1S_2 = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$r = 5 - 4 = 1$ **(A)**

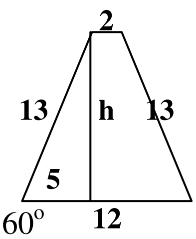
Zad 18. Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa mamy:

$5^2 + h^2 = 13^2$

$25 + h^2 = 169$

$h^2 = 169 - 25 \qquad h^2 = 144$

$h = \sqrt{144} = 12$



(D)

Zad 19. Wiadomo że suma miar kątów w czworokącie wynosi 360°

Mamy więc: $2x + 3x + 3x + 4x = 360°$

$12x = 360° | : 12$

$x = 30° \qquad 2x = 60°$ **(A)**

Zad 20. $V = \pi r^2 \cdot h$ jeżeli $h = r$ to mamy:

$V = \pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot r = \pi r^3 = 27\pi$

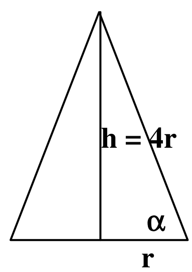
$r = \sqrt[3]{27} = 3$ **(C)**

Zad 21. $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{4}{3}\pi r^3 | \cdot 3$

$\pi r^2 \cdot h = 4\pi r^3 | : \pi r^2$

$h = 4r$

$\tan \alpha = \frac{h}{r} = \frac{4r}{r} = 4$



(D)

Zad 22. $Śr = \frac{14 \cdot 1 + 28 \cdot 2 + 17 \cdot 3 + 11 \cdot 4 + 7 \cdot 5}{100} = \frac{14 + 56 + 51 + 44 + 35}{100} = \frac{200}{100} = 2$ **(C)**

Zad 23. Oznaczmy: $3x -$ liczba krawędzi; $2x -$ liczba wierzchołków

$3x + 2x = 15 \qquad 5x = 15 \qquad x = 3 \qquad 3x = 9$ **(A)**

Zad 24. Jeżeli cyfry są bez 0 i bez 2 to znaczy że cyfr jest 8. Na ostatnim miejscu może być tylko $\{4;\ \ 6;\ \ 8\}$ aby liczba była parzysta. Tak więc mamy takich liczb:$8\cdot 8\cdot 8\cdot 3$ **(A)**

Zad 25. Jeżeli losujemy z dwóch kul ze zwracaniem to tak samo jakby rzucać monetą. Robimy to czterokrotnie więc $\overline{\overline{\Omega}} = 2^4 = 16$

$A = \{(cz; b; b; b); (b; cz; b; b); (b; b; cz; b); (b; b; b; cz)\}$

$P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ **(C)**

Zadania otwarte

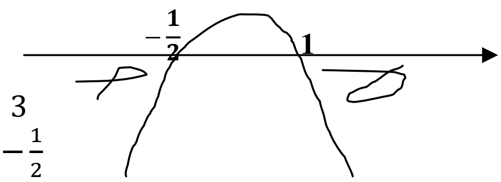
Zad 26. $2x(1-x)+1-x<0$

$2x-2x^2+1-x<0$

$-2x^2+x+1<0$

$\Delta = 1^2 - 4\cdot(-2)\cdot 1 = 1+8 = 9$ $\sqrt{9}=3$

$x_1 = \frac{-1-3}{2\cdot(-2)} = \frac{-4}{-4} = 1$ $x_2 = \frac{-1+3}{2\cdot(-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$



Odp: $x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup (1;\ \ +\infty)$

Zad 27. $f(x) = x^2+bx+c$ $A=(0,\ -5)$ $x=7$ - oś symetrii wykresu

Punkt $A=(0,\ -5)$ jest punktem przecięcia z osią OY więc $c=-5$. Oś symetrii dla $x=7$ czyli wierzchołek ma współrzędne $(7;\ \ q)$. Mamy więc w postaci kanonicznej:

$f(x) = (x-7)^2+q$

$f(x) = x^2-14x+49+q$

Odpowiedź: $b=-14$ $c=-5$

Zad 28. Przyjmijmy: $n-1;$ $n;$ $n+1;$ $n+2$ - cztery kolejne liczby naturalne.

Suma kwadratów tych liczb to:

$(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2 = n^2-2n+1+n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4 = 4n^2+4n+6 = 4n(n+1)+6$ Otrzymaliśmy iloczyn$4n(n+1)$ oraz liczbę 6. Iloczyn ten dzieli się przez 8. Podzielność ta wynika z faktu że mamy liczbę 4 pomnożoną przez iloczyn dwóch kolejnych liczb $n(n+1)$ z który jedna musi być parzysta, czyli podzielna przez 2. Mamy więc $2\cdot 4 = 8$. Poza wskazanym iloczynem jest liczba 6 która jest resztą z dzielenia.

Zad 29. Trójkąty AED i PBF są prostokątne bo ABCD jest prostokątem.

Odcinki $DE = BF = x = \frac{1}{3}AB$

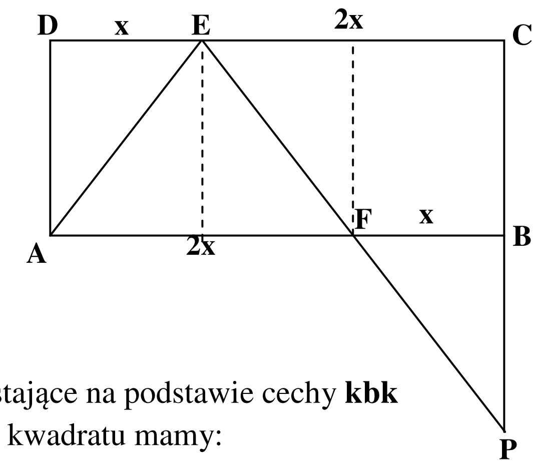
pozostało wykazać że $\sphericalangle AED = \sphericalangle PFB$

Prostokąt ABCD można podzielić na trzy prostokąty przystające jak na rysunku.

Tak więc kąty $\sphericalangle AED = \sphericalangle PEC$ kąt przekątnej z bokiem w prostokątach przystających.

$\sphericalangle FEC = \sphericalangle PFB$ jako kąty odpowiadające.

Czyli mamy $\sphericalangle AED = \sphericalangle PFB$



Wykazaliśmy że trójkąty ADE i PFB są przystające na podstawie cechy **kbk**

Zad 30. $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$ podnosząc równanie do kwadratu mamy:

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$

$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha = 2$

$1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2-1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 1$ $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1\cdot\frac{2}{1} = 2$

Zad 31. W czterokrotnym rzucie monetą mamy $2^4 = 16$ wyników.

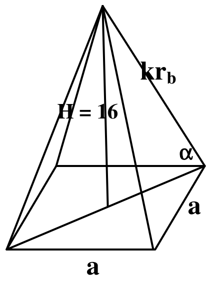
$\Omega = \{(oooo); (ooor); (ooro); (oroo); (rooo); (oorr); (orro); (rroo); (roor); (oror); (roro); (rrro); (rror); (rorr); (orrr); (rrrr); \}$

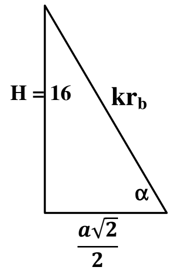
Zapisując to w tabelce zgodnie z warunkami zadania mamy:

orzeł	4	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	0
reszka	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4
	t	t	t	t	t	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n

Więcej orłów niż reszek mamy w pięciu przypadkach (pierwsze pięć w tabeli) tak więc mamy:
Odpowiedź: $P(A) = \frac{5}{16}$

Zad 32.





$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

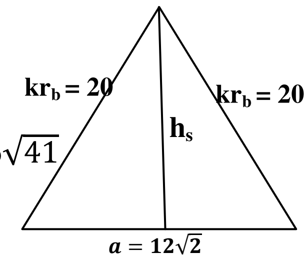
$\sin^2\alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \qquad \sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$

$\sin^2\alpha = \frac{16}{25} \qquad \sin\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

$\sin\alpha = \frac{H}{kr_b} \quad \Longrightarrow \quad \frac{4}{5} = \frac{16}{kr_b} \quad \Longrightarrow \quad kr_b = \frac{16\cdot 5}{4} = 20$

$\cos\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{20} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{5} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{20} \quad \Longrightarrow \quad 3\cdot 20 = 5\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad 60 = \frac{5\sqrt{2}a}{2}$

$120 = 5\sqrt{2}a \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{120}{5\sqrt{2}} = \frac{24}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}$



$(h_s)^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 20^2 \quad \Longrightarrow \quad (h_s)^2 = 400 - 72$

$(h_s)^2 = 328 \qquad h_s = \sqrt{328} = \sqrt{4\cdot 82} = 2\sqrt{82}$

$P_b = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 12\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{82} = 24\cdot 2\cdot\sqrt{2\cdot 82} = 48\sqrt{4\cdot 41} = 48\cdot 2\sqrt{41} = 96\sqrt{41}$

Odpowiedź: Pole powierzchni bocznej ostrosłupa wynosi $96\sqrt{41}$

Zad 33. Ciąg arytmetyczny

$a_6 = 2a_5$ oraz $S_{10} = \frac{15}{4}$

Z faktu że to ciąg arytmetyczny mamy: $a_5 = a_1 + 4r \qquad a_6 = a_1 + 5r$

tak więc: $a_1 + 5r = 2(a_1 + 4r) \quad \Longrightarrow \quad a_1 + 5r = 2a_1 + 8r$

$a_1 - 2a_1 = 8r - 5r \quad \Longrightarrow \quad -a_1 = 3r \quad \Longrightarrow \quad a_1 = -3r$

$S_{10} = \frac{2a_1 + (10-1)r}{2}10 = \frac{15}{4}$

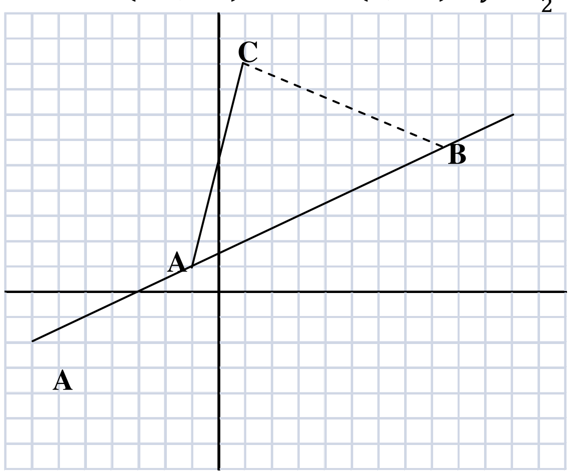
$\frac{2\cdot(-3r) + (10-1)r}{2}10 = \frac{15}{4}$

$(-6r + 9r)5 = \frac{15}{4} \quad \Longrightarrow \quad 3r\cdot 5 = \frac{15}{4}|\cdot 4 \quad \Longrightarrow \quad 15r\cdot 4 = 15|:15$

$4r = 1 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{1}{4} \qquad a_1 = -3\cdot\frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$

Odp: Pierwszy wyraz ciągu $a_1 = -\frac{3}{4}$ $r = \frac{1}{4}$.

Zad 34. $A = (-1;\ \ 1) \qquad C = (1;\ \ 9) \qquad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ |AC| = |BC| $\qquad B = (x;\ \ y)$



$|AC| = \sqrt{(1+1)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} = |BC|$

$|BC| = \sqrt{(1-x)^2 + (9-y)^2} = \sqrt{68}$

$(1-x)^2 + (9-y)^2 = 68$ i punkt $B = (x;\ \ y)$ leży na prostej $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ czyli

$(1-x)^2 + \left(9 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)^2 = 68$

$(1-x)^2 + (7{,}5 - 0{,}5x)^2 = 68$

$1 - 2x + x^2 + 56{,}25 - 7{,}5x + 0{,}25x^2 = 68$

$1{,}25x^2 - 9{,}5x + 57{,}25 - 68 = 0$
$1{,}25x^2 - 9{,}5x - 10{,}75 = 0| \cdot 4$
$5x^2 - 38x - 43 = 0$
$\Delta = (-38)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-43) = 1444 + 860 = 2304$ $\sqrt{2304} = 48$
$x_1 = \frac{38-48}{10} = \frac{-10}{10} = -1$ $x_2 = \frac{38+48}{10} = \frac{86}{10} = 8{,}6$
$x_1 = -1$ to współrzędna punktu A
$x_2 = 8{,}6$ $y_2 = 0{,}5 \cdot 8{,}6 + 1{,}5 = 4{,}3 + 1{,}5 = 5{,}8$ $B = (8{,}6;\quad 5{,}8)$