Zadania zamknięte

Zad 1. $k = 2^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

$a = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{2} = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{2} = 2^{\frac{3}{4}-1} = 2^{-\frac{1}{4}}$ **(A)**

Zad 2. $\big||x| - 2\big| = |x| + 2$

$|x| - 2 = |x| + 2 \quad \vee \quad |x| - 2 = -(|x| + 2)$

$|x| - |x| = 2 + 2 \quad \vee \quad |x| - 2 = -|x| - 2$

$0 = 4 - sprzeczność \quad \vee \quad |x| + |x| = -2 + 2$

$2|x| = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$ **(B)**

Zad 3. $2\log_5 10 - \frac{1}{\log_{20} 5} = 2\log_5 10 + \log_{20} 5 = 2\log_5 10 + \frac{\log_5 5}{\log_5 20} = \log_5 10^2 + \frac{1}{\log_5 20} =$

$\log_5 100 - \log_5 20 = \log_5 \frac{100}{20} = \log_5 5 = 1$ **(C)**

Zad 4. $\lim_{x\to 3^-} \frac{-x+2}{x^2-5x+6} = \frac{-}{0^-} = +\infty$

wystarczy ustalić że $f(x) = x^2 - 5x + 6$ ma miejsca zerowe x = 2 i x = 3 oraz gałęzie do góry więc po lewej stronie miejsca zerowego x = 3 są wartości ujemne (przedział między pierwiastkami) **(D)**

Zadania otwarte

Zad 5. $A = (-5;\ \ 3)$ czyli wykres jest przesunięty względem $(0;\ \ 0)$ o wektor $[-5;\ \ 3]$

$f(x) = \frac{ax+7}{x+d} = \frac{a(x+d)+7-ad}{x+d} = \frac{7-ad}{x+d} + a$ stąd mamy że d = 5 a = 3 więc $f(x) = \frac{3x+7}{x+5}$. Szukany iloraz $\frac{d}{a} = \frac{5}{3} \approx 1{,}66$

Zad 6. $y = \sqrt{3}x^2 - 1$ czyli $f(x) = \sqrt{3}x^2 - 1$

$f'(x) = 2\sqrt{3}x$ styczna do krzywej ma postać $f(x) = ax + b$ gdzie $a = \tan\alpha$

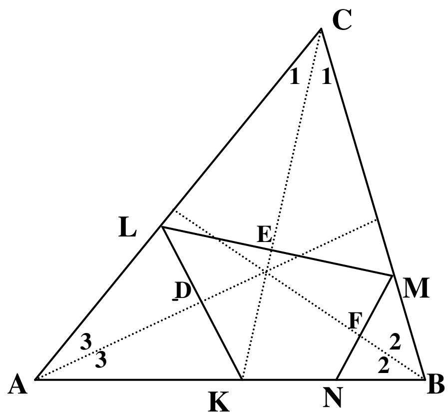
$\alpha = 30°$ więc $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ tak więc styczna do krzywej ma wzór $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$.

Z definicji pochodnej w punkcie wiemy znowu że $f'(x_0) = \tan\alpha$ czyli

$2\sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Longrightarrow \quad 6\sqrt{3}x = \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad 6x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{6}$ - współrzędna x punktu styczności. Teraz $f\left(\frac{1}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 1 = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{36} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{36} - \frac{36}{36} = \frac{\sqrt{3}-36}{36}$ - współrzędna y punktu styczności.

Odpowiedź: punkt styczności P ma współrzędne $\left(\frac{1}{6};\ \ \frac{\sqrt{3}-36}{36}\right)$

Zad 7.



Kąty w trójkącie ABC są podzielone dwusiecznymi więc wprowadzam oznaczenia

$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 3 = 180°$ więc $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 90°$

(Przy użyciu oznaczeń klasycznych dowód będzie jeszcze bardziej nieprzejrzysty)

Zgodnie z założeniami zadania trójkąty ADL, ADK jak również CEL, CEM oraz BMF i BFN są prostokątne i parami przystające. Przy punktach D, E, F mamy kąty proste. Tak więc wyliczając trzeci kąt w trójkącie prostokątnym otrzymujemy: $\sphericalangle CLE = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3$

$\sphericalangle ALD = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 1$ więc kąt w czworokącie

$\sphericalangle KLM = 180° - (\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 1) = 180° - (\sphericalangle 2 + 90°) = 90° - \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 + \sphericalangle 1$

analogicznie $\sphericalangle LMN = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2$. Teraz kąty przy boku AB czyli $\sphericalangle LKN\ \ i\ \sphericalangle KNM$ obliczamy w sposób następujący $\sphericalangle AKD = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 1$ więc $\sphericalangle LKN = 180° - (\sphericalangle 2 + \sphericalangle 1)$ i podobnie $\sphericalangle KNM = 180° - (\sphericalangle 3 + \sphericalangle 1)$

Teraz sumując kąty w czworokącie leżące naprzeciw siebie otrzymujemy:

$\sphericalangle KLM + \sphericalangle KNM = \sphericalangle 3 + \sphericalangle 1 + 180° - (\sphericalangle 3 + \sphericalangle 1) = 180°$ Tak samo

$\sphericalangle LMN + \sphericalangle LKN = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + 180° - (\sphericalangle 2 + \sphericalangle 1) = 180°$ Co jest dowodem na to że w czworokąt można wpisać okrąg.

Zad 8. Aby wykazać że liczba jest podzielna przez 6 trzeba wykazać że dzieli się przez 2 oraz dzieli się przez 3.

I sposób: $k^3m - km^3 = km(k^2 - m^2) = km(k - m)(k + m)$ i tu trzeba rozpatrzyć bardzo wiele przypadków na parzystość bądź nie *k* i *m* jak również ich podzielność przez 3 bez reszty z resztą 1 lub 2.

II. Można jednak przekształcić to wyrażenie w nieco inny sposób dający szybciej odpowiedź:

$$k^3m - km^3 = km(k^2 - m^2) = km(k^2 - 1 + 1 - m^2) = km(k^2 - 1) + km(1 - m^2) =$$
$$= km(k^2 - 1) - km(m^2 - 1) = km(k - 1)(k + 1) - km(m - 1)(m + 1)$$

Otrzymaliśmy różnicę dwóch iloczynów i w każdym z nich mamy iloczyn trzech kolejnych liczb: $k - 1;\quad k;\quad k + 1$ oraz $m - 1;\quad m;\quad m + 1$.

A) Podzielność przez 3 otrzymujemy bardzo szybko bo z trzech kolejnych liczb jedna musi dzielić się przez 3 oraz różnica liczb podzielnych przez 3 jest podzielna przez 3.

B) Podzielność przez 2 podobnie bo z trzech kolejnych liczb jedna lub dwie są podzielne przez 2 oraz różnica liczb parzystych jest parzysta.

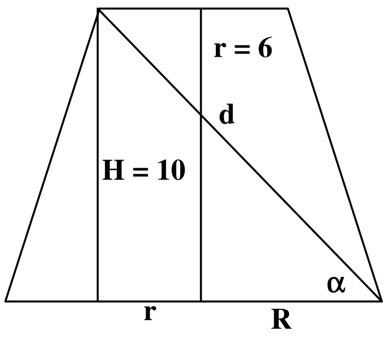
Zad 9. Mamy zbiór $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 9\}$ elementów jest 8 więc tworzenie ciągów 8 elementowych to permutacja tego zbioru czyli $\bar{\bar{\Omega}} = 8!$

Zdarzenie A liczby parzyste nie są obok siebie. Tworzymy model ustawień:

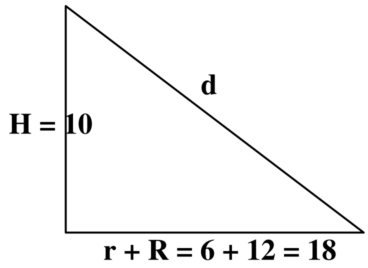
$\{p;\ n;\ p;\ n;\ p;\ n;\ p;\ n;\ p;\ n;\ p\}$ gdzie p – to liczba parzysta n – liczba nieparzysta.

Liczb nieparzystych n jest pięć więc można ich rozmieścić na 5! sposobów. Liczb parzystych jest 3 ale miejsc w których mogłyby wystąpić p jest 6. Cały ciąg może się rozpoczynać liczbą parzystą bądź nieparzystą tak samo na końcu ciągu. Z tych 6 miejsc przeznaczonych dla liczb parzystych 3 są puste w konkretnym przypadku. Pierwszą liczbę parzystą możemy umieścić w 6 różnych miejscach, drugą w 5 pozostałych miejscach a ostatnią w czterech pozostałych. Tak więc $\bar{\bar{A}} = 5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \qquad P(A) = \frac{5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 8} = \frac{5}{14}$

Zad 10.



Aby zadanie rozwiązać czyli obliczyć $\cos\alpha = \frac{r+R}{d}$ brakuje nam promienia R oraz d - przekątna przekroju



$V = \frac{1}{3}\pi H(6^2 + 6R + R^2) = 840\pi$

$\frac{1}{3}\pi 10(36 + 6R + R^2) = 840\pi |: \frac{1}{3}\pi$

$10(36 + 6R + R^2) = 2520 |: 10$

$36 + 6R + R^2 = 252$

$R^2 + 6R - 216 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-216) - 36 + 864 = 900 \qquad \sqrt{900} = 30$

$R_1 = \frac{-6-30}{2} = \frac{-36}{2} = -18 \quad R_2 = \frac{-6+30}{2} = \frac{24}{2} = 12$

R_1 jako liczba ujemna nie spełnia warunków zadania.

Obliczamy długość przekątnej ***d*** z Tw. Pitagorasa

$d^2 = 10^2 + 18^2$

$d^2 = 100 + 324$

$d^2 = 424 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{424} = \sqrt{4 \cdot 106} = 2\sqrt{106}$

$\cos\alpha = \frac{18}{2\sqrt{106}} = \frac{9}{\sqrt{106}}$

Zad 11. $\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1 \qquad x \in \langle 0; \ \pi \rangle$

$2\sin 3x \cdot \cos 3x + \cos 3x - 2\sin 3x - 1 = 0$

$\cos 3x\,(2\sin 3x + 1) - (2\sin 3x + 1) = 0$

$(\cos 3x - 1)(2\sin 3x + 1) = 0$

$\cos 3x - 1 = 0 \quad \vee \quad 2\sin 3x + 1 = 0$

$\cos 3x = 1 \quad \vee \quad 2\sin 3x = -1$

$3x = 0 + 2k\pi \quad \vee \quad \sin 3x = -\frac{1}{2}$

$x = 0 + \frac{2}{3}k\pi \quad \vee \quad 3x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$

$x = \frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi \quad \vee \quad x = \frac{11}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi$

Odpowiedź: dla $x \in \langle 0; \ \pi \rangle$ mamy: $x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{2}{3}\pi \quad \vee \quad x = \frac{7}{18}\pi \quad \vee \quad x = \frac{11}{18}\pi$

Zad 12. $x^2 + (m+1)x - m^2 + 1 = 0$ dla jakich m istnieją rozwiązania $x_1;\ x_2;\ (x_1 \neq x_1)$ oraz $x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2$

1) $\Delta > 0 \quad (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m^2 + 1) > 0$

$m^2 + 2m + 1 + 4m^2 - 4 > 0$

$5m^2 + 2m - 3 > 0$

$\Delta_1 = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3) = 4 + 60 = 64 \qquad \sqrt{64} = 8$

$m_1 = \frac{-2-8}{10} = -1 \qquad m_2 = \frac{-2+8}{10} = 0{,}6 \qquad m \in (-\infty; \ -1) \cup (0{,}6; \ +\infty)$

2) $x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2$

$(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) + 7x_1x_2 > 0$ korzystając z przekształconego wzoru $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ czyli $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ otrzymamy:

$(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - x_1x_2] + 7x_1x_2 > 0$

$(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] + 7x_1x_2 > 0$

ze wzorów Viete'a mamy: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -m - 1$ $\quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -m^2 + 1$

$(-m-1)[(-m-1)^2 - 3(-m^2+1)] + 7(-m^2+1) > 0$

$(-m-1)[m^2 + 2m + 1 + 3m^2 - 3] - 7m^2 + 7 > 0$

$(-m-1)(4m^2 + 2m - 2) - 7m^2 + 7 > 0$

$-4m^3 - 2m^2 + 2m - 4m^2 - 2m + 2 - 7m^2 + 7 > 0$

$-4m^3 - 13m^2 + 9 > 0$ pierwiastkiem jest np.: $m_1 = -1$

$-4(-1)^3 - 13(-1)^2 + 9 = -4 \cdot (-1) - 13 + 9 = 4 - 13 + 9 = 0$

$(-4m^3 - 13m^2 + 9) : (m+1) = -4m^2 - 9m + 9$

rozwiążmy teraz równanie:

$-4m^2 - 9m + 9 = 0$

$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 9 = 81 + 16 \cdot 9 = 81 + 144 = 225 \qquad \sqrt{225} = 15$

$m_2 = \frac{9-15}{-8} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4} \qquad m_3 = \frac{9+15}{-8} = \frac{24}{-8} = -3$ oraz wcześniej obliczone $m_1 = -1$

widząc że ten wielomian $-4m^3 - 13m^2 + 9 > 0$ dla $+\infty$ ma wartość$-\infty$ to wartości dodatnie ma dla $m \in (-\infty;\ -3) \cup \left(-1;\ \frac{3}{4}\right)$. Teraz szukając części wspólnej odp 1) i 2) otrzymujemy

$m \in (-\infty;\ -1) \cup (0{,}6;\ +\infty) \ \wedge\ m \in (-\infty;\ -3) \cup \left(-1;\ \frac{3}{4}\right) \Rightarrow m \in (-\infty;\ -3) \cup \left(0{,}6;\ \frac{3}{4}\right)$

Odpowiedź: $m \in (-\infty;\ -3) \cup \left(0{,}6;\ \frac{3}{4}\right)$

Zad 13. $\begin{cases} a_3 + a_6 = -84 \\ a_4 + a_7 = 168 \end{cases}$ a_n - ciąg geometryczny

$\begin{cases} a \cdot q^2 + a \cdot q^5 = -84 \\ a \cdot q^3 + a \cdot q^6 = 168 \end{cases}$

$\begin{cases} a \cdot q^2(1 + a \cdot q^3) = -84 \\ a \cdot q^3(1 + a \cdot q^3) = 168 \end{cases}$ teraz dzieląc II równanie przez I otrzymujemy $q = -2$

Takie dzielenie jest prawidłowe gdyż czynniki po lewej stronie nie mogą być równe zero bo lewa strona $\neq 0$

wstawiając $q = -2$ do I równania mamy: $a(-2)^2 + a(-2)^5 = -84$

$4a - 32a = -84$

$-28a = -84 | : (-28)$

$a_1 = 3$ oraz $q = -2$

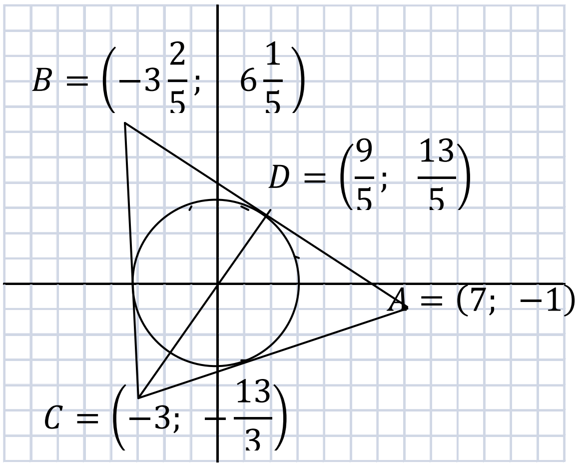
$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ czyli $3\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = 32769$

$3\frac{1-(-2)^n}{3} = 32769$

$1 - (-2)^n = 32769 \quad \Rightarrow \quad -(-2)^n = 32769 - 1 \quad \Rightarrow \quad (-2)^n = -32768$

$n = 15$ bo $(-2)^{15} = -32768$

Zad 14. $A = (7;\ \ -1)$ $x^2 + y^2 = 10$ – okrąg wpisany w trójkąt ABC |AC| = |BC|



$x^2 + y^2 = r^2$ - równanie okręgu czyli $r = \sqrt{10}$ i środek okręgu w punkcie $(0;\ \ 0)$.
Z równania prostej przechodzącej przez dany punkt $y - y_0 = a(x - x_0)$; $(x_0;\ \ y_0) = (7;\ \ -1)$
$y + 1 = a(x - 7)$ Po przekształceniu do postaci ogólnej mamy
$y + 1 - ax + 7a = 0 \quad \Rightarrow \quad -ax + y + 7a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad ax - y - 7a - 1 = 0$
Punkt $(0;\ \ 0) = (x_0;\ y_0)$ jako środek okręgu musi być w odległości $r = \sqrt{10}$ od tej prostej.
Odległość punktu od prostej $\frac{|Ax_0+Bx_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sqrt{10}$ gdzie $A = a; B = -1; C = -7a - 1$
$\frac{|a\cdot 0+(-1)\cdot 0+(-7a-1)|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} = \sqrt{10}$
$\frac{7a+1}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{10}$ | po podniesieniu do kwadratu mamy
$\frac{(7a+1)^2}{a^2+1} = 10$ $|\cdot (a^2 + 1)$
$(7a + 1)^2 = 10(a^2 + 1)$
$49a^2 + 14a + 1 = 10a^2 + 10$
$39a^2 + 14a - 9 = 0$
$\Delta = 14^2 - 4 \cdot 39 \cdot (-9) = 196 + 1404 = 1600 \qquad \sqrt{1600} = 40$
$a_1 = \frac{-14-40}{2\cdot 39} = -\frac{54}{78} = -\frac{9}{13} \qquad a_2 = \frac{-14+40}{2\cdot 39} = \frac{26}{78} = \frac{1}{3}$
Proste styczne do okręgu przechodzące przez $A = (7;\ \ -1)$ mają postać $y = -\frac{9}{13}x + b$ oraz
$y = \frac{1}{3}x + b$

1) $y = -\frac{9}{13}x + b \quad A = (7;\ \ -1)$
$-1 = -\frac{9}{13} \cdot 7 + b$
$-1 = -\frac{63}{13} + b$
$b = \frac{63}{13} - \frac{13}{13} = \frac{50}{13}$
$y = -\frac{9}{13}x + \frac{50}{13}$

2) $y = \frac{1}{3}x + b \quad A = (7;\ \ -1)$
$-1 = \frac{1}{3} \cdot 7 + b$
$-1 = \frac{7}{3} + b$
$b = -1 - \frac{7}{3} = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}$
$y = \frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3}$

Na pierwszej prostej leży punkt B a na drugiej punkt C bo w treści zadania jest że C ma współrzędne ujemne a tylko prosta $y = \frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3}$ przechodzi przez III ćwiartkę co widać po współczynniku b.
Trójkąt ABC jest równoramienny i |AC| = |BC| więc wysokość poprowadzona z punktu C jest prostopadła do AB i zawiera symetralną AB oraz musi przechodzić przez środek okręgu czyli

przez $(0;\quad 0)$. Wysokość ta przechodzi też przez punkt styczności prostej AB z okręgiem. Prosta CD prostopadłą do AB więc gdy AB ma współczynnik kierunkowy $a_1 = -\frac{9}{13}$ to $a_2 = \frac{13}{9}$ czyli prosta CD ma postać $y = \frac{13}{9}x + b$ ale przechodzi przez $(0;\quad 0)$ więc jej wzór to $y = \frac{13}{9}x$ Rozwiązując układ równań $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3} \\ y = \frac{13}{9}x \end{cases}$ obliczymy współrzędna C

$\frac{13}{9}x = \frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3}$

$\frac{13}{9}x - \frac{3}{9}x = -\frac{10}{3}$

$\frac{10}{9}x = -\frac{10}{3} \quad \Longrightarrow \quad x = -3 \qquad y = \frac{13}{9}x = \frac{13}{9} \cdot (-3) = -\frac{13}{3} \qquad C = \left(-3;\ -\frac{13}{3}\right)$

Teraz rozwiązując układ równań $\begin{cases} y = -\frac{9}{13}x + \frac{50}{13} \\ y = \frac{13}{9}x \end{cases}$ wyznaczymy punkt przecięcia Prostej AB z prostą CD czyli środek podstawy AB.

$\frac{13}{9}x = -\frac{9}{13}x + \frac{50}{13}$

$\frac{13}{9}x + \frac{9}{13}x = \frac{50}{13}$

$\frac{169}{117}x + \frac{81}{117}x = \frac{50}{13}$

$\frac{250}{117}x = \frac{50}{13}$

$x = \frac{50}{13} \cdot \frac{117}{250} = \frac{9}{5} \qquad y = \frac{13}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{13}{5} \quad D = \left(\frac{9}{5};\ \frac{13}{5}\right)$ współrzędne środka boku AB.

Korzystając ze wzorów na środek odcinka mamy:

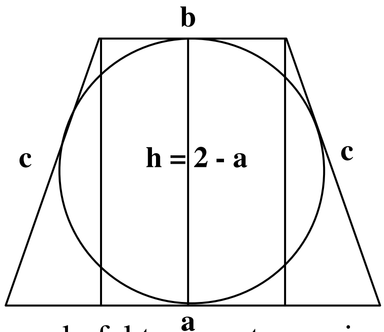
$\frac{7+x}{2} = \frac{9}{5} \quad \Longrightarrow \quad 7 + x = \frac{18}{5} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{18}{5} - 7 \quad \Longrightarrow \quad x = 3\frac{3}{5} - 7 \quad \Longrightarrow \quad x = -3\frac{2}{5}$

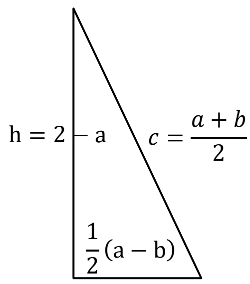
$\frac{-1+y}{2} = \frac{13}{5} \quad \Longrightarrow -1 + y = \frac{26}{5} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{26}{5} + 1 \quad \Longrightarrow \quad y = 6\frac{1}{5}$

$B = \left(-3\frac{2}{5};\quad 6\frac{1}{5}\right)$

Zad 15. A) a - dłuższa podstawa trapezu $h = 2 - a$ - wysokość trapezu.
Zauważmy że dla a = 1, h = 1 i trapez jest kwadratem. Jeżeli a – dłuższa podstawa to $a > 1$.
$a < 2$ bo w przeciwnym wypadku $h \leq 0$ co byłoby niemożliwe. Odp: $a \in (1;\quad 2)$

B) Wykażemy prawdziwość wzoru na obwód trapezu: $L(a) = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a}$





Obwód L = a + b + 2c Z powodu faktu że w trapez jest wpisany okrąg to a + b = c + c czyli a + b = 2c $c = \frac{a+b}{2}$ Tak więc L = a + b + a + b = 2(a + b) Teraz należy jeszcze wyznaczyć b za pomocą a. Można to zrobić stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego będącego częścią trapezu $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = (2 - a)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} = 4 - 4a + a^2 + \frac{a^2-2ab+b^2}{4} | \cdot 4$

$a^2 + 2ab + b^2 = 16 - 16a + 4a^2 + a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - a^2 - 4a^2 + 2ab + 2ab + b^2 - b^2 + 16a - 16 = 0$

$-4a^2 + 4ab + 16a - 16 = 0$

$4ab = 4a^2 - 16a + 16 | : 4$

$ab = a^2 - 4a + 4$

$b = \frac{a^2-4a+4}{a}$

Obwód $L = 2(a+b) = 2\left(a + \frac{a^2-4a+4}{a}\right) = 2\left(\frac{a^2}{a} + \frac{a^2-4a+4}{a}\right) = 2\left(\frac{2a^2-4a+4}{a}\right) = \frac{4a^2-8a+8}{a}$

C) $f(a) = \frac{4a^2-8a+8}{a} \quad a \in (1; \ \ 2)$

$f'(a) = \frac{(8a-8)a-(4a^2-8a+8)\cdot 1}{a^2} = \frac{8a^2-8a-4a^2+8a-8}{a^2} = \frac{4a^2-8}{a^2}$

Warunkiem koniecznym extremum jest $f'(a) = 0$

$\frac{4a^2-8}{a^2} = 0$ i $a \in (1; \ \ 2)$ więc mogę bez obaw pomnożyć równanie przez a^2

$4a^2 - 8 = 0 | : 4$

$a^2 - 2 = 0$

$(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2}) = 0$

$a - \sqrt{2} = 0 \quad \vee \quad a + \sqrt{2} = 0$

$a_1 = \sqrt{2} \quad \vee \quad a_2 = -\sqrt{2}$ - poza dziedziną

Ustalamy jeszcze jakie extremum jest w punkcie $a = \sqrt{2}$. łatwo zauważyć że dla $a < \sqrt{2}\ i\ a > 1$ wyrażenie $4a^2 - 8 < 0$ a dla $a > \sqrt{2}\ i\ a < 2$ wyrażenie $4a^2 - 8 > 0$ co świadczy że dla $a = \sqrt{2}$ mamy minimum.

$\tan\alpha = \frac{h}{\frac{1}{2}(a-b)} = \frac{2-a}{\frac{1}{2}\left(a - \frac{a^2-4a+4}{a}\right)} = \frac{2(2-a)}{\frac{a^2}{a} - \frac{a^2-4a+4}{a}} = \frac{2(2-a)}{\frac{4a-4}{a}} = \frac{2a(2-a)}{4a-4} = \frac{2\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{4\sqrt{2}-4} = \frac{4\sqrt{2}-4}{2\sqrt{2}-4} = 1$

$\tan\alpha = 1$ czyli $\alpha = 45°$