Zadania zamknięte

Zad 1. $2\log_3 6 - \log_3 4 = \log_3 6^2 - \log_3 4 = \log_3 \frac{36}{4} = \log_3 9 = 2$ **(B)**

Zad 2. $\sqrt[3]{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{81}{56}} = \sqrt[3]{\frac{7 \cdot 81}{3 \cdot 56}} = \sqrt[3]{\frac{81}{3 \cdot 8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$ **(C)**

Zad 3. $a = 3{,}6 \cdot 10^{-12}$ $b = 2{,}4 \cdot 10^{-20}$ $\frac{a}{b} = \frac{3{,}6 \cdot 10^{-12}}{2{,}4 \cdot 10^{-20}} = \frac{3{,}6}{2{,}4} \cdot 10^{-12-(-20)} = 1{,}5 \cdot 10^{-12+20} = 1{,}5 \cdot 10^{8}$ **(C)**

Zad 4. Po obniżce o 15% nowa cena stanowi 85% starej. Jeżeli 85% to 850zł więc 100% to 1000zł **(C)**

Zad 5. $\frac{1-2x}{2} > \frac{1}{3}$ mnożąc nierówność przez 6 otrzymujemy $3(1-2x) > 2$ czyli $3 - 6x > 2$ → $-6x > 2 - 3$ → $-6x > -1$ dzieląc nierównośc przez – 6 otrzymamy $x < \frac{1}{6}$ Odp. $x \in \left(-\infty;\ \frac{1}{6}\right)$ **(A)**

Zad 6. $f(x) = -2(x+3)(x-5)$ czyli $x_1 = -3$ $x_2 = 5$ stąd otrzymujemy $x_1 + x_2 = (-3) + 5 = 2$ **(C)**

Zad 7. Wyrażenie $\frac{x^2+2x}{x^2-4} = \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)}$. Z powodu takiego mianownika dziedzina $D = R \setminus \{-2;\ 2\}$ tak więc równanie $\frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = 0$ ma tylko jeden pierwiastek $x = 0$ **(D)**

Zad 8. $f(x) = \frac{1}{x}x - 1$ $a = \frac{1}{3}$ czyli funkcja jest rosnąca $b = -1$ czyli wykres przecina oś OY w punkcie $P = (0;\ -1)$ **(D)**

Zad 9. $f(x) = x^2 - 6x - 3;$ $a = 1,$ $b = -6,$ $c = -3$ współrzędne wierzchołka to $(p;\ q)$ gdzie $p = \frac{-b}{2a}$ $q = \frac{-\Delta}{4a}$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 36 + 12 = 48$ $p = \frac{-(-6)}{2} = 3$ $q = \frac{-48}{4} = -12$ Odp. $P = (3;\ -12)$ **(C)**

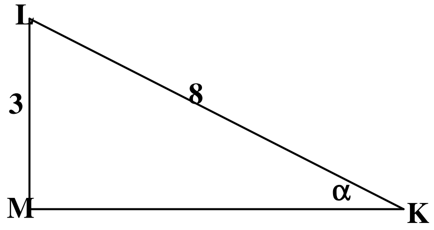
Zad 10. $f(x) = ax + b$ miejsce zerowe x = 1 czyli jest to punkt na osi OX o współrzędnych $A = (1;\ 0)$ oraz dany jest punkt $M = (3;\ -2)$. Współczynnik kierunkowy $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-0}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$ **(D)**

Zad 11. $a_n = \frac{5-2n}{6}$ $a_{n+1} = \frac{5-2(n+1)}{6} = \frac{5-2n-2}{6} = \frac{3-2n}{6}$ Sprawdzamy czy jest arytmetyczny $a_{n+1} - a_n = \frac{3-2n}{6} - \frac{5-2n}{6} = \frac{3-2n-5+2n}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$ czyli $r = -\frac{1}{3}$ **(A)**

Zad 12. $a_4 + a_5 + a_6 = 12$ z własności ciągu arytmetycznego mamy $a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2}$ czyli $2a_5 = a_4 + a_6$ więc $2a_5 + a_5 = 12$ → $3a_5 = 12$ co nam daje że $a_5 = 4$ **(A)**

Zad 13. Ciąg geometryczny $a_1 = \sqrt{2}$ $a_2 = 2\sqrt{2}$ $a_3 = 4\sqrt{2}$ obliczamy q $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$ $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \sqrt{2} \cdot 2^{n-1} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2^{n-1} \cdot 2}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2^n}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2^n}{\sqrt{2}}$ Odp. (B)

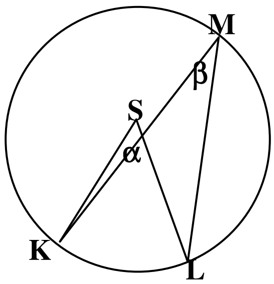
Zad 14.



$\sin\alpha = \frac{3}{8} = 0{,}375$ teraz korzystając z tablic odczytujemy $\alpha \approx 22{,}1°$ **(C)**

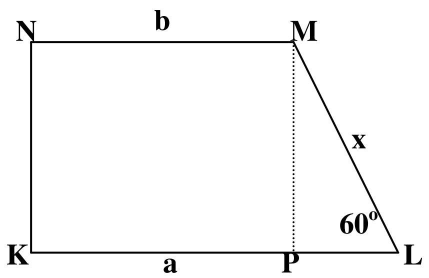
Zad 15. Trójkąt ma boki $a = 2\sqrt{5}$; $b = 3\sqrt{5}$; $c = 4\sqrt{5}$ stosunki boków w tym trójkącie wynoszą $\frac{b}{a} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$ oraz $\frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{2} = 2$. Łatwo zauważyć że tak samo będzie w odpowiedzi A $\frac{15}{10} = \frac{3}{2}$ oraz $\frac{20}{10} = 2$ **(A)**

Zad 16.



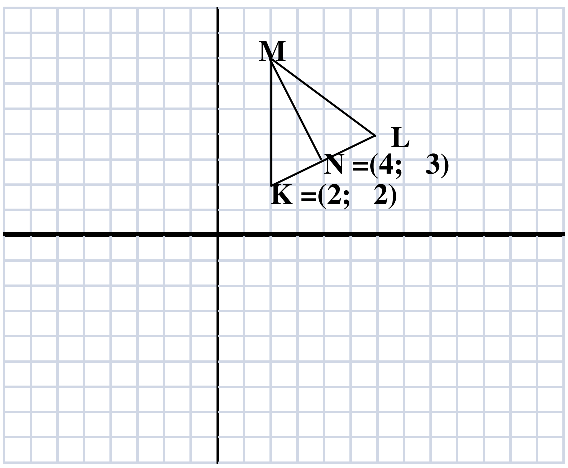
α – kąt środkowy β – kąt wpisany $\alpha = 2 \cdot \beta$. Jeżeli $\alpha + \beta = 111°$ to $2 \cdot \beta + \beta = 111° \;\rightarrow\; 3\beta = 111° \;\rightarrow\; \beta = 37° \quad \alpha = 2 \cdot 37° = 74°$ **(A)**

Zad 17.



$|PL| = |a - b| \;\; \cos 60° = \frac{a-b}{x} = \frac{1}{2}$ stąd $x = 2(a - b)$ **(B)**

Zad 18. Z dobrze wykonanego rysunku widać że L=(6; 4)

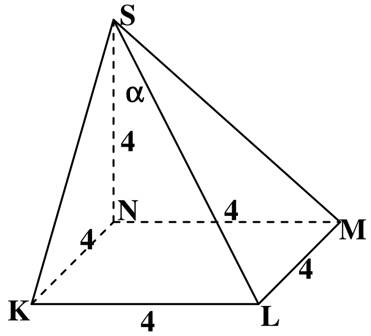


współrzędne punktu L = (x; y) można policzyć ze wzoru na środek odcinka

$4 = \frac{2+x}{2} \rightarrow 8 = 2 + x \rightarrow x = 6$ $3 = \frac{2+y}{2} \rightarrow y = 4$ L=(6; 4) **(B)**

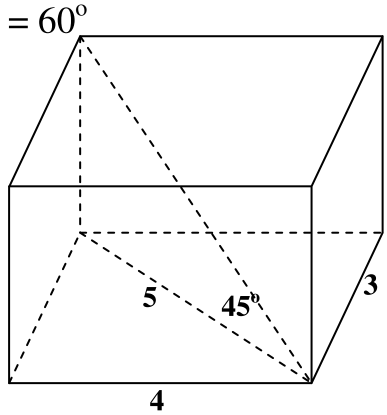
Zad 19. $y = (m+2)x + 3$ $y = (2m-1)x - 3$ Aby proste były równoległe muszą ich współczynniki kierunkowe być takie same czyli $a_1 = a_2$ to znaczy $m + 2 = 2m - 1 \rightarrow -m = -3 \rightarrow m = 3$ **(B)**

Zad 20.



Odcinek NS jest prostopadły do podstawy więc trójkąty KMN; MNS i KNS są prostokątne równoramienne przystające do siebie. Tak więc trójkąt KMS jest równoboczny więc kąt α = 60° (D)

Zad 21.



Jeżeli krawędzie mają długości 4cm i 3 cm to przekątna ma 5 cm. (twierdzenie pitagorasa). Z powodu podanego kąta 45° zaznaczony trójkąt jest prostokątny równoramienny więc druga jego przyprostokątna ma też 5 cm **(A)**

Zad 22. Zadanie zakłada że h = r. Objętość walca $V = \pi r^2 h = \pi r^2 r = \pi r^3$ Objętość połowy kuli $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$ razem $V = \pi r^3 + \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{5}{3} \pi r^3$ **(A)**

Zad 23. Oczywistym jest że średnia tego zestawu wynosi 3. Obliczając wariancję z poszczególnych nawiasów będą wychodziły jedynki $(2-3)^2 = (-1)^2 = 1$ jak również $(4-3)^2 = 1$ Tak więc otrzymujemy ułamek $\sigma^2 = \frac{m\ jedynek + m jedynek}{2m} = \frac{2m}{2m} = 1$ Odchylenie standardowe $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1} = 1$ **(B)**

Zad 24. Najmniejsza liczba czterocyfrowa 1000. W tysiącu liczb, liczb podzielnych przez 5 jest 200 (1000 : 5 = 200). Startując od 1000 i doliczając dwieście liczb podzielnych przez 5 dochodzimy do 1995 (1000 był pierwszą liczbą szukaną a nie zerową). Teraz trzeba doliczyć do tego 2000, 2005, 2010, 2015, czyli jeszcze 4 liczby. Mamy więc 200 + 4 = 204. **(D)**

Zad 25. 50 kuponów. 15 przegrywających to 50 – 15 = 35 wygrywających. Zdarzenie A – wyciągnięty los wygrywa. $\overline{\overline{\Omega}} = 50$ $\overline{\overline{A}} = 35$ $P(A) = \frac{35}{50}$ **(D)**

Zadania otwarte

Zad 26. $2x^2 - 3x > 5$

$2x^2 - 3x - 5 > 0 \quad (a = 2;\ b = -3;\ c = -5)$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

$x_1 = \frac{3-7}{2 \cdot 2} = \frac{-4}{4} = -1 \quad x_2 = \frac{3+7}{2 \cdot 2} = \frac{10}{4} = 2{,}5 \quad (a = 2 > 0)$. Wykres ma gałęzie do góry więc wartości dodatnie na zewnątrz pierwiastków. Zbiór rozwiązań to $x \in (-\infty;\ -1) \cup (2{,}5;\ +\infty)$

Zad 27. $(x^3 + 125)(x^2 - 64) = 0$

$(x^3 + 125) = 0 \ \vee\ (x^2 - 64) = 0$

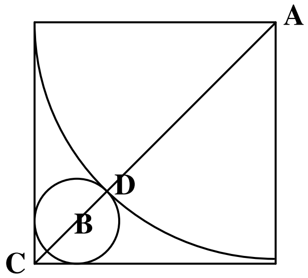
$x^3 = -125 \ \vee\ (x - 8)(x + 8) = 0$

$x = \sqrt[3]{-125} \ \vee\ (x - 8) = 0 \ \vee\ (x + 8) = 0$

$x_1 = 5;\ \ x_2 = 8;\ \ x_3 = -8$

Zad 28. $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} \geq \frac{2}{a+b}$ (liczby a i b są dodatnie). $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} = \frac{1 \cdot b}{2ab} + \frac{1 \cdot a}{2ab} = \frac{b+a}{2ab} = \frac{a+b}{2ab}$ czyli mam wykazać $\frac{a+b}{2ab} \geq \frac{2}{a+b}$ a po przeniesieniu na jedną stronę $\frac{a+b}{2ab} - \frac{2}{a+b} \geq 0$ sprowadzamy do wspólnego mianownika $\frac{(a+b)(a+b)}{2ab(a+b)} - \frac{2 \cdot 2ab}{(a+b) \cdot 2ab} \geq 0 \implies \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{2ab(a+b)} \geq 0 \implies \frac{a^2-2ab+b^2}{2ab(a+b)} \geq 0 \implies \frac{(a-b)^2}{2ab(a+b)} \geq 0$ z uwagi na to że a i b są dodatnie więc mianownik jest dodatni. Licznik też jest nieujemny bo jest kwadratem pewnej liczby. Z reguły jest dodatni a w jednym przypadku gdy $a = b$ wynosi 0.

Zad 29. Należy obliczyć o ile jest większa przekątna kwadratu od boku tego kwadratu gdy bok a=2.

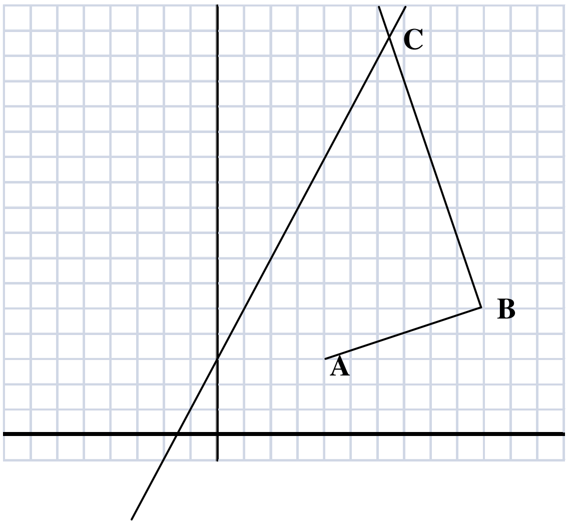


$|AC| = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ – przekątna kwadratu $|DC| = 2\sqrt{2} - 2$ widzimy że średnica małego okręgu jest mniejsza od DC. Więc promień tego okręgu jest mniejszy od $\frac{1}{2} \cdot |DC| = \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{2} - 2\right) = \sqrt{2} - 1$ ***CBDO***

Zad 30. $f(x) = a^x$ $P(2;\ \ 9)$ $9 = a^2 \implies a = 3$ $f(x) = 3^x$ zbiór wartości dla funkcji wykładniczej f to $ZbW = (0;\ \ \infty)$ Jeżeli $g(x) = f(x) - 2$ to $ZbW = (-2;\ \ \infty)$

Zad 31. Ciąg arytmetyczny $a_{12} = 30$ $S_{14} = 162$ wystarczy skorzystać ze wzoru na sumę ciągu arytmetycznego $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1+a_{12}}{2} \cdot 12$ i rozwiązać równanie $\frac{a_1+30}{2} \cdot 12 = 162 \implies (a_1 + 30)6 = 162 \implies 6a_1 + 180 = 162 \implies 6a_1 = -18$ $a_1 = -3$

Zad 32. A = (4; 3) B = (10; 5) punkt C leży na prostej y=2x + 3 i kąt ABC jest prosty

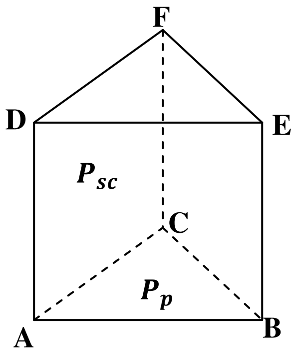


współczynnik kierunkowy prostej AB $a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{5-3}{10-4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ teraz z warunku o prostych prostopadłych mamy $a_2 = -\frac{1}{a_1} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{1} = -3$ Tak więc prosta BC ma postać $y = -3x + b$ i przechodzi przez punkt B = (10; 5). Wstawiając współrzędne punktu do wzoru na prostą mamy: $5 = -3 \cdot 10 + b \implies b = 35$. Otrzymaliśmy wzór na prostą BC $y = -3x + 35$ teraz trzeba rozwiązać układ równań $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -3x + 35 \end{cases}$ aby wyznaczyć współrzędne punktu C. Podstawiając jedno równanie do drugiego mamy $2x + 3 = -3x + 35 \implies 5x = 35 - 3 \implies 5x = 32 \implies$ $x = 6\frac{2}{5}$ wstawiając to np. do I równania $y = 2 \cdot 6\frac{2}{5} + 3 \implies y = 12\frac{4}{5} + 3 \implies$ $y = 15\frac{4}{5}$ Odpowiedź $\begin{cases} x = 6\frac{2}{5} = \frac{32}{5} \\ y = 15\frac{4}{5} = \frac{79}{5} \end{cases}$

Zad 33. $A = \{100; 200; 300; 400; 500; 600; 700\}$; $B = \{10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} 110; \mathbf{111}; 112; 113; \mathbf{114}; 115; 116 \\ \mathbf{210}; 211; 212; \mathbf{213}; 214; 215; \mathbf{216} \\ 310; 311; \mathbf{312}; 313; 314; \mathbf{315}; 316 \\ 410; \mathbf{411}; 412; 413; \mathbf{414}; 415; 416 \\ \mathbf{510}; 511; 512; \mathbf{513}; 514; 515; \mathbf{516} \\ 610; 611; \mathbf{612}; 613; 614; \mathbf{615}; 616 \\ 710; \mathbf{711}; 712; 713; \mathbf{714}; 715; 716 \end{matrix} \right\}$$ $\bar{\bar{\Omega}} = 49$ A – liczby podzielne przez 3 – zaznaczone w całym zbiorze Ω tłustym drukiem $\bar{\bar{A}} = 16$ Odpowiedź $P(A) = \frac{16}{49}$

Zad 34.



$P_{pc} = 45\sqrt{3}$ Pole powierzchni całkowitej składa się z pól 5 ścian (3 ściany boczne i 2 podstawy) i wszystkie są równe. $P_{sc} = P_p = \frac{45}{5}\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$. Podstawą jest trójkąt równoboczny$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \implies \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \implies \frac{a^2}{4} = 9 \implies a^2 = 36 \implies a = \sqrt{36} \implies a = 6$ Ściana boczna jest prostokątem czyli $P = a \cdot h = 9\sqrt{3} \implies 6h = 9\sqrt{3} \implies h = \frac{9\sqrt{3}}{6} = 1{,}5\sqrt{3}$ Objętość graniastosłupa $V = P_p \cdot h = 9\sqrt{3} \cdot 1{,}5\sqrt{3} = 13{,}5 \cdot 3 = 40{,}5$ Odpowiedź $V = 40{,}5 = \frac{81}{2}$