Listopad 2017 rok (poziom rozszerzony)
Zadania zamknięte

Zad 1. $(x^2+2x-3)(x^2+x-m)=0$ ma mieć 4 rozwiązania

I) obliczamy pierwiastki równania $x^2+2x-3=0$

$\Delta = 2^2-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=16 \qquad \sqrt{16}=4$

$x_1=\frac{-2-4}{2}=\frac{-6}{2}=-3; \qquad x_2=\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1$

II) Teraz określamy warunki kiedy II część równania ma 2 pierwiastki

$x^2+x-m=0\ >0$

$\Delta = 1^2-4\cdot1\cdot(-m)=1+4m$ Musi być spełniony warunek $\Delta>0$ czyli $1+4m>0$

$4m>-1|:4 \qquad m>-\frac{1}{4}$ Czyli można by sądzić że $m\in\left(-\frac{1}{4};\ \infty\right)$

III) Trzeba jeszcze wykluczyć sytuację aby któreś pierwiastki były sobie równe

przyjmijmy $f(x)=x^2+x-m$

$f(-3)=(-3)^2+(-3)-m=9-3-m=6-m$

$6-m=0 \quad \Rightarrow \quad -m=-6 \quad \Rightarrow \quad m=6$

$f(1)=(1)^2+1-m=1+1-m=2-m$

$2-m=0 \quad \Rightarrow \quad -m=-2 \quad \Rightarrow \quad m=2$

Ostatecznie $m\in\left(-\frac{1}{4};\ \infty\right)\backslash\{2;\ 6\}$ **(B)**

Zad 2. $n=x^4y^2$ gdzie $x;\ y$ – liczby pierwsze.

Zbiór wszystkich dzielników liczby ***n*** to:

$\{1;\ x;\ x^2;\ x^3;\ x^4;\ y;\ xy;\ x^2y;\ x^3y;\ x^4y;\ y^2;\ y^2x;\ y^2x^2;\ y^2x^3;\ y^2x^4\}$ **(A)**

Zad 3. $\sqrt{(2x^2+1)^2}=3$ czyli

$|2x^2+1|=3$

$2x^2+1=3 \quad \vee \quad 2x^2+1=-3$

$2x^2=2 \quad \vee \quad 2x^2=-4$ - nie ma rozwiązania

$x^2=1 \qquad x_1=1 \ \vee\ x_2=-1$ **(B)**

Zad 4. Reszta z dzielenia przez $(x-1)(x+3)$ jest postaci $ax+b$

Mamy więc dla $x=1;\quad a\cdot1+b=4$ natomiast dla $x=-3;\quad a\cdot(-3)+b=-16$

Rozwiązujemy układ równań: $\begin{cases} a+b=4|\cdot(-1) \\ -3a+b=-16 \end{cases}$

$\begin{cases} -a-b=-4 \\ -3a+b=-16 \end{cases}$ po dodaniu stronami

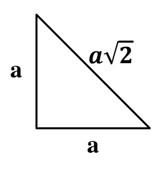
$-4a=-20|:(-4) \qquad a=5 \qquad b=4-5=-1$

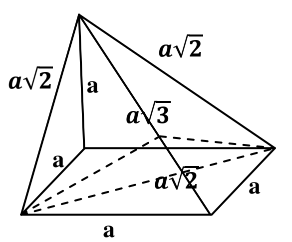
Odpowiedź: Reszta z dzielenia przez $(x-1)(x+3)$ ma postać $5x-1$ **(C)**

Zad 5. Obliczamy długości krawędzi bocznych nieprostopadłych do podstawy:

krótsza z nich ma długość $a\sqrt{2}$ jako przekątna kwadratu

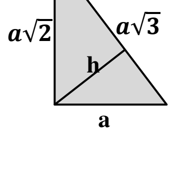
a dłuższa $a\sqrt{3} \qquad a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2=\left(a\sqrt{3}\right)^2$





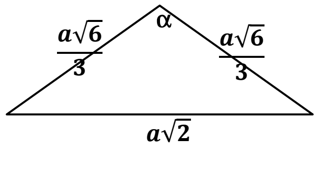
Obliczamy następnie długość wysokości w trójkącie nieprostopadłym do podstawy opuszczonej na najdłuższy bok.

Aby to zrobić obliczamy pole trójkąta (*szarego*)



$P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\sqrt{2}=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Teraz można też obliczyć to samo pole z wzoru:



$P=\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{3}\cdot h=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

$\frac{a\sqrt{3}\cdot h}{2}=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}\Big|:\frac{a}{2}$

$h\sqrt{3}=a\sqrt{2} \qquad h=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

teraz pozostało obliczyć $\cos\alpha$ z ostatniego rysunku. Korzystając z twierdzenia kosinusów mamy:

$\left(a\sqrt{2}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2-2\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}\cdot\cos\alpha$

$2a^2 = 2\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 \cdot \cos\alpha \,|: 2$

$a^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 \cdot \cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad a^2 = \frac{6a^2}{9} - \frac{6a^2}{9} \cdot \cos\alpha$

$\frac{6a^2}{9} \cdot \cos\alpha = -a^2 + \frac{6a^2}{9} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2a^2}{3} \cdot \cos\alpha = -\frac{a^2}{3}$

$\cos\alpha = -\frac{a^2}{3} \cdot \frac{3}{2a^2} = -\frac{1}{2}$ **(D)**

Zad 6. ***x*** i ***y*** spełniają warunek: $2x + y - 5 = 0 \qquad y = -2x + 5 = 5 - 2x$

$W = 8x^3 + y^3$

$W(x) = 8x^3 + (-2x+5)^3 = 8x^3 - 8x^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 5 - 3 \cdot 2x \cdot 25 + 125 = 60x^2 - 150x + 125$

$W(x) = 60x^2 - 150x + 125 \qquad p = -\frac{b}{2a} = \frac{150}{2 \cdot 60} = \frac{150}{120} = 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$W\left(\frac{5}{4}\right) = 60\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 150 \cdot \frac{5}{4} + 125 = 60 \cdot \frac{25}{16} - \frac{750}{4} + 125 = 15 \cdot \frac{25}{4} - \frac{750}{4} + 125 = \frac{375}{4} - \frac{750}{4} + 125 =$

$= -\frac{375}{4} + 125 = -93{,}75 + 125 = 31{,}25$

Odpowiedź: $\boxed{3}\,\boxed{1}\,\boxed{2}$

Zad 7. Jeżeli trapez opisany na okręgu to $a + b = c + d \quad a;\ b$ długości podstaw $c;\ d$ długości ramion

środkowa trapezu $x = \frac{a+b}{2} = \frac{2}{13} \qquad 2x = a + b = \frac{4}{13}$

Obwód trapezu $a + b + c + d = 2x + 2x = 4x = \frac{4}{13} + \frac{4}{13} = \frac{8}{13} = 0{,}6153$ ...

Odpowiedź $\boxed{6}\,\boxed{1}\,\boxed{5}$

Zad 8. Okręg $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 54 = 0$ i prosta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$

Wydawać się może że najprościej po prostu rozwiązać podany układ równań czyli podstawić równanie prostej do równania okręgu i obliczyć współrzędne punktów przecięcia prostej z okręgiem następnie obliczyć długość odcinka. Jak się okazuje współrzędne punków przecięcia prostej z okręgiem są liczbami niewymiernymi i taka droga byłaby dość żmudna.

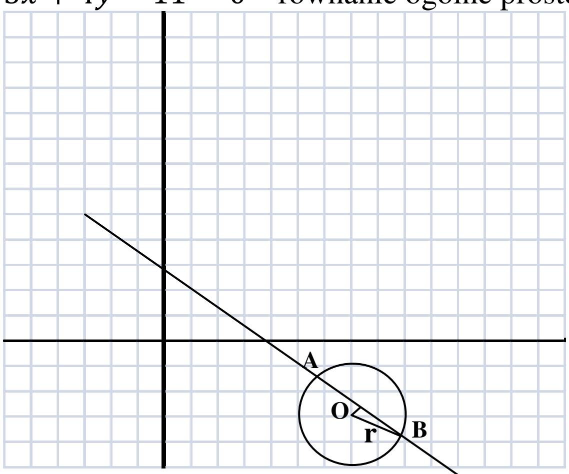
Przekształcamy równanie okręgu do postaci kanonicznej:

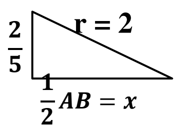
$x^2 - 14x + 49 + y^2 + 6y + 9 - 4 = 0$

$(x-7)^2 + (y+3)^2 = 2^2 \qquad (7;\ -3)$ – współrzędne środka okręgu $r = 2$ – promień okręgu

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4} \,| \cdot 4 \qquad 4y = -3x + 11$

$3x + 4y - 11 = 0$ – równanie ogólne prostej





Obliczmy odległość środka okręgu $(7;\ -3)$ od prostej $3x + 4y - 11 = 0$

$d = \frac{|3 \cdot 7 + 4 \cdot (-3) - 11|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|21 - 12 - 11|}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

Teraz z twierdzenia Pitagorasa mamy: $\left(\frac{2}{5}\right)^2 + x^2 = 2^2$

$x^2 = 4 - \frac{4}{25} = 3\frac{21}{25} = \frac{96}{25} \qquad x = \sqrt{\frac{96}{25}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 6}{25}} = \frac{4\sqrt{6}}{5} \qquad 2x = \frac{8\sqrt{6}}{5} \approx 3{,}1918$ ...

Odpowiedź: $\boxed{3}\,\boxed{1}\,\boxed{9}$

Zad 9. $y = \frac{4x}{x-3}$ hiperbola. Czy istnieje styczna prostopadła do: $2x + 4y - 1 = 0$

$2x + 4y - 1 = 0$ czyli $4y = -2x + 1 |: 4$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ – równanie kierunkowe tej prostej.

Prosta do niej prostopadła ma postać $y = 2x + b$

Obliczmy teraz pochodną funkcji $y = \frac{4x}{x-3}$

$y'(x) = \frac{4(x-3) - 4x \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{4x - 12 - 4x}{(x-3)^2} = \frac{-12}{(x-3)^2}$

Jak wiemy wartość pochodnej w punkcie styczności równa się współczynnikowi kierunkowemu stycznej czyli ma być: $\frac{-12}{(x-3)^2} = 2$

Łatwo zauważyć że równanie to nie ma rozwiązania gdyż lewa strona jest zawsze niedodatnia jako iloraz liczby ujemnej (– 12) przez kwadrat liczby $(x-3)^2$ który jest nieujemny. Nie może liczba niedodatnia równać się 2. Tak zostało wykazane że taka prosta nie istnieje.

Zad 10. $f(x) = \frac{2x}{x^2+4}$ Podać zbiór wartości.

Funkcja jest ciągła i określona dla $x \in R$ gdyż mianownik $x^2 + 4$ jest zawsze dodatni i różny od zera. Korzystając z faktu że: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ mamy że $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+4} = 0$ jak również $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2+4} = 0$ gdyż w mianowniku mamy wyższą potęgę niż w liczniku

Jest też: $f(0) = \frac{2\cdot 0}{0^2+4} = 0$

$f'(x) = \frac{2(x^2+4) - 2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^2 + 8 - 4x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2}$

$f'(x) = 0$ czyli $-2x^2 + 8 = 0 |: (-2)$ $\quad x^2 - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -2; \quad x_2 = 2$

Mamy więc dwa punkty $x_1 = -2$ – minimum; oraz $x_2 = 2$ – maksimum.

$f(-2) = \frac{2(-2)}{(-2)^2+4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$ $\qquad f(2) = \frac{2\cdot 2}{2^2+4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Odpowiedź: $ZW = \langle -\frac{1}{2}; \ \frac{1}{2} \rangle$

Zad 11. Jeżeli $S = \frac{a_1}{1-q}$ $\quad a_1 > 0$ to $S_2 = \frac{a_1}{1-q^2}$ - suma ciągu o numerach nieparzystych

Mamy wykazać że dla: $a_3 = a_1 \cdot q^2$ zachodzi nierówność: $4a_1 \cdot q^2 \le \frac{a_1}{1-q^2}$ gdy $|q| < 1$

Wykażemy to: $4a_1q^2 \le \frac{a_1}{1-q^2}$ dla $|q| < 1$

$4a_1q^2 - \frac{a_1}{1-q^2} \le 0 |: a_1 \quad \Longrightarrow \quad 4q^2 - \frac{1}{1-q^2} \le 0$ z założenia $a_1 > 0$

$\frac{4q^2(1-q^2)}{1-q^2} - \frac{1}{1-q^2} \le 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{4q^2 - 4q^4 - 1}{1-q^2} \le 0$

$\frac{-(4q^4 - 4q^2 + 1)}{1-q^2} \le 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{-(q^2-1)^2}{1-q^2} \le 0.$

Ostatnia nierówność jest oczywista gdyż mianownik dla $|q| < 1$ jest dodatni a licznik jako minus kwadrat liczby jest ujemny dla dowolnego q

Zad 12. Rozwiązać nierówność: $4\cos^2 2x - 3 < 0$ dla $x \in \langle 0; \ 2\pi \rangle$

$4\cos^2 2x < 3 |: 4 \quad \Longrightarrow \quad \cos^2 2x < \frac{3}{4}$

$\cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \wedge \quad \cos 2x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Wiemy że gdy $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ to $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$

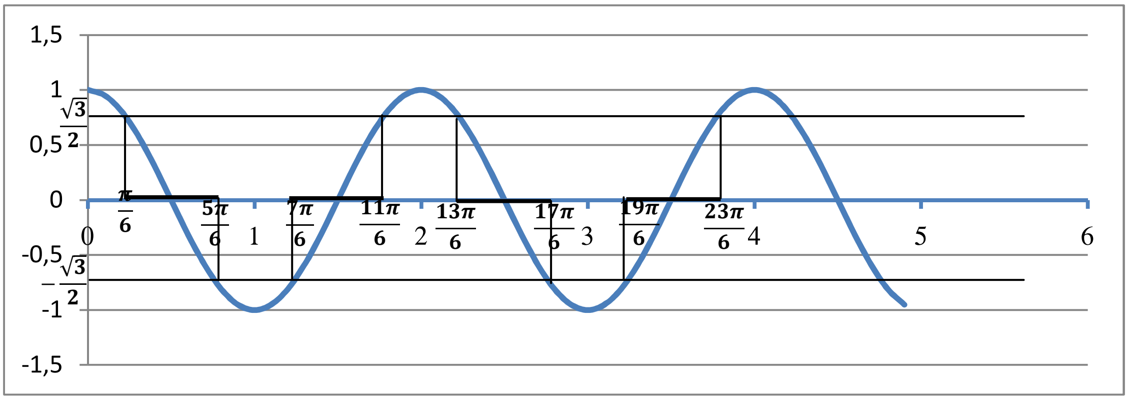
oraz gdy $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ to $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$

Patrząc na wykres widzimy że dla 2x przedziały spełniające nierówność dla $2x \in \langle 0; \ 4\pi \rangle$ to:

$2x \in \langle \frac{\pi}{6}; \ \frac{5\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{7\pi}{6}; \ \frac{11\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{13\pi}{6}; \ \frac{17\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{19\pi}{6}; \ \frac{23\pi}{6} \rangle$

Czyli ostatecznie dla $x \in \langle 0; \ 2\pi \rangle$ mamy rozwiązanie:

Odpowiedź: $2x \in \langle \frac{\pi}{12}; \quad \frac{5\pi}{12} \rangle \cup \langle \frac{7\pi}{12}; \quad \frac{11\pi}{12} \rangle \cup \langle \frac{13\pi}{12}; \quad \frac{17\pi}{12} \rangle \cup \langle \frac{19\pi}{12}; \quad \frac{23\pi}{12} \rangle$



Zad 13. Suma cyfr ma być 4 a więc w 20 znakowym ciągu gdzie większość to zera mogą być wmieszane takie cyfry: $\{1,1,1,1; \quad 1,1,2; \quad 1,3; \quad 2,2; \quad 4\}$

Kolejny fakt który trzeba zauważyć to, to że na początku liczby nie może być 0.

Mamy więc 7 przypadków do rozpatrzenia:

1) Na początku 1 a potem dalsze trzy jedynki wmieszane między 16 zer

$1 \cdot \binom{3}{19} = \frac{19!}{3! \cdot 16!} = \frac{17 \cdot 18 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 17 \cdot 3 \cdot 19 = 969$

2) Na początku jedynka a druga jedynka i dwójka wmieszane między 17 zer

$1 \cdot \binom{19}{1} \cdot \binom{18}{1} = 1 \cdot 19 \cdot 18 = 342$

3) Na początku dwójka a dwie jedynki wmieszane między 17 zer

$1 \cdot \binom{19}{2} = 1 \cdot \frac{19!}{2! \cdot 17!} = \frac{18 \cdot 19}{2} = 9 \cdot 19 = 171$

4) Na początku jedynka a trójka wmieszana w 18 zer: $1 \cdot \binom{19}{1} = 1 \cdot 19 = 19$

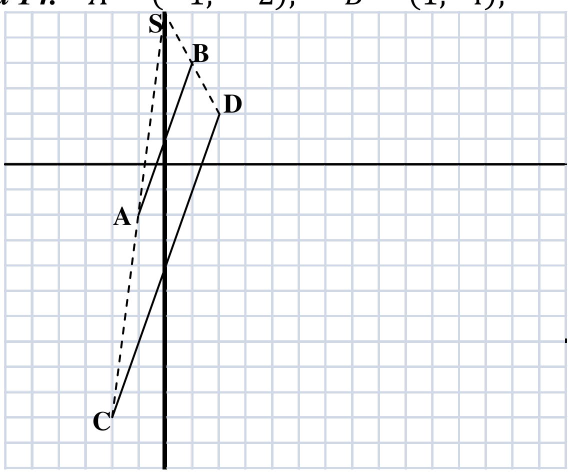
5) Na początku trójka a jedynka wmieszana w 18 zer: $1 \cdot \binom{19}{1} = 1 \cdot 19 = 19$

6) Na początku dwójka a druga dwójka wmieszana w 18 zer: $1 \cdot \binom{19}{1} = 1 \cdot 19 = 19$

7) Na początku czwórka a potem same zera: 1

Ostatecznie razem mamy: $969 + 342 + 171 + 19 + 19 + 19 + 1 = 1540$

Zad 14. $A = (-1; \ -2); \quad B = (1; \ 4); \quad C = (-2; \ -10); \quad D = (2; \ 2)$



A

Przedstawię dwa podejścia do rozwiązania tego zadania:

I – Rozwiązanie oparte na równaniu kierunkowym prostej: $y = ax + b$

1) Aby wykazać że odcinki AB i CD są równoległe wystarczy policzyć współczynnik kierunkowy prostych na których leżą te odcinki $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a_{AB} = \frac{4-(-2)}{1-(-1)} = \frac{6}{2} = 3 \qquad a_{CD} = \frac{2-(-10)}{2-(-2)} = \frac{12}{4} = 3$ Tak więc widzimy że odcinki są równoległe

2) Aby poszukać środka jednokładności dla tych odcinków napiszemy równania prostych AC i BD a następnie poszukamy ich punku przecięcia

Prosta AC $a_{AC} = \frac{-10-(-2)}{-2-(-1)} = \frac{-8}{-1} = 8$ Prosta AC ma postać $y = 8x + b$ $\qquad A = (-1;\ \ -2)$

$-2 = 8 \cdot (-1) + b \qquad b = 8 - 2 = 6 \qquad y = 8x + 6$

Prosta BD $a_{BD} = \frac{2-4}{2-1} = \frac{-2}{1} = -2$ Prosta BD ma postać $y = -2x + b$ $\qquad B = (1;\ \ 4)$

$4 = -2 \cdot 1 + b \qquad b = 4 + 2 = 6 \qquad y = -2x + 6$

Widzimy że obie proste przecinają oś OY w punkcie $(0;\ \ 6)$ $\qquad b = 6$ Tak więc przecinają się one w punkcie $(0;\ \ 6)$ i jest to środek symetrii.

3) Obliczymy długości odcinków AB i CD oraz skalę podobieństwa.

$$|AB| = \sqrt{\left(1-(-1)\right)^2 + \left(4-(-2)\right)^2} = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = 2\sqrt{10}$$

$$|CD| = \sqrt{\left(2-(-2)\right)^2 + \left(2-(-10)\right)^2} = \sqrt{4^2+12^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160} = \sqrt{16 \cdot 10} = 4\sqrt{10}$$

$$k = \frac{4\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = 2$$

II Rozwiązanie oparte o działania na wektorach. ***(znacznie krótsze i prostsze)***

1) Obliczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AB} = [1-(-1);\ \ 4-(-2)] = [2;\ \ 6] \qquad \overrightarrow{CB} = [2-\ (-2);\ \ 2-\ (-10)] =\ [4;\ \ 12]$

Łatwo zauważyć że $CD = 2 \cdot AB$ $\qquad$ [4; 12] = 2 · [2; 6]

Wynika z tego że wektory są równoległe i skala wynosi 2

2) Szukamy środka jednokładności. $S = (x;\ \ y)$

Jeżeli już wiemy że skala $k = 2$ to $SC = 2 \cdot SA$ czyli:

$[-2-x;\ \ -10-y] = 2 \cdot [-1-x;\ \ -2-y]$

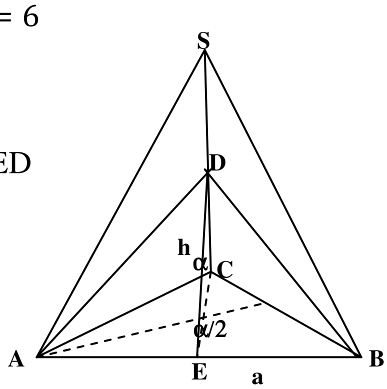
$[-2-x;\ \ -10-y] = [-2-2x;\ \ -4-2y]$

$-2-x = -2-2x \qquad 2x - x = 2 - 2 \qquad x = 0$

$-10-y = -4-2y \qquad 2y - y = 10 - 4 \qquad y = 6$

$S = (0;\ \ 6)$

3) Długości odcinków liczymy jak w poprzednim sposobie.



Zad 15. Aby policzyć pole trójkąta ABD trzeba obliczyć wysokość ED

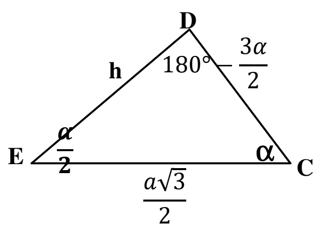
Czyli zająć się trójkątem ECD leżącym w płaszczyźnie przekroju. ostrosłupa wzdłuż krawędzi CS i wysokości podstawy CE

Odcinek CE jest wysokością trójkąta równobocznego ABC więc

$CE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ a kąt przy wierzchołku D ma miarę $180° - \frac{3\alpha}{2}$

Teraz korzystając z twierdzenia sinusów mamy:

$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{CE}{\sin\left(180° - \frac{3\alpha}{2}\right)}$ czyli $\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sin\left(180° - \frac{3\alpha}{2}\right)}$



$$h = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha}{\sin\left(180° - \frac{3\alpha}{2}\right)} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha}{\sin 180° \cdot \cos\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2} \cdot \cos 180°} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha}{0 \cdot \cos\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2} \cdot (-1)} =$$

$$= \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sin\alpha}{2 \cdot \sin\frac{3\alpha}{2}}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3} \cdot \sin\alpha}{2 \cdot \sin\frac{3\alpha}{2}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}$$

Zad 16. Urna I 7 kul czarnych Urna II 3 kule czarne.

Dokładamy losowo 3 kule białe. Losujemy urnę a następnie jedną kulę z wylosowanej urny.

Ile kul ma być dołożone do urny I aby przy takim losowaniu, wylosowanie kuli białej wynosiło $\frac{17}{72}$

I) Do konkretnej urny można dołożyć: $n \in \{0;\ \ 1;\ \ 2;\ \ 3\}$ kule białe.

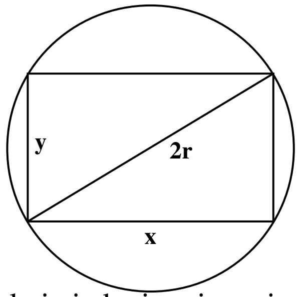
Mamy 2 zdarzenia $B_1;\ \ B_2$ polegające na wylosowaniu I lub II urny. $P(B_1) = \frac{1}{2} \qquad P(B_2) = \frac{1}{2}$

Jeżeli do I urny dokładamy ***n*** kul białych to do II urny dokładamy $3 - n$ kul białych.

Tak więc po dołożeniu kul białych do urn mamy:
w urnie I - $7+n$ kul a w urnie II - $3+3-n=6-n$ kul.
Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej obliczamy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:
$P(A)=P(A|B_1)+P(A|B_2)=\frac{n}{7+n}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3-n}{6-n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{17}{72}$
Trzeba więc rozwiązać równanie $\frac{n}{7+n}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3-n}{6-n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{17}{72}$ dla $n\in\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$
$\frac{n(6-n)+(3-n)(7+n)}{2(7+n)(6-n)}=\frac{17}{72}$
$\frac{6n-n^2+21+3n-7n-n^2}{2(42-7n+6n-n^2)}=\frac{17}{72}$ $\frac{-2n^2+2n+21}{-2n^2-2n+84}=\frac{17}{72}$ po wymnożeniu na krzyż mamy:
$72(-2n^2+2n+21)=17(-2n^2-2n+84)$
$-144n^2+144n+1512=-34n^2-34n+1428$
$-144n^2+144n+1512+34n^2+34n-1428=0$
$-110n^2+178n+84=0|:(-2)$
$55n^2-89n-42=0$
$\Delta=89^2-4\cdot 55\cdot(-42)=7921+9240=17161$ $\sqrt{17161}=131$
$n_1=\frac{89-131}{2\cdot 55}=\frac{-42}{110}=-\frac{21}{55}$ $n_2=\frac{89+131}{2\cdot 55}=\frac{220}{110}=2$
$n_1=-\frac{21}{55}$ nie spełnia warunków zadania $n_1\notin\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z losowej urny wynosi $\frac{17}{72}$ dla n = 2 czyli gdy do I urny wrzucimy 2 kule białe.

Zad 17. $x^2+(2m+1)x-3m^2-\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}=0$
I) Aby istniały dwa pierwiastki to $\Delta>0$
$\Delta=(2m+1)^2-4\cdot 1\cdot\left(-3m^2-\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}\right)=4m^2+4m+1+12m^2+2m-1=16m^2+6m$
$\Delta>0$ $16m^2+6m>0|:2$
$8m^2+3m>0$ $m(8m+3)>0$
$m_1=0$ $\vee$ $8m+3=0$ $\Longrightarrow$ $m_2=-\frac{3}{8}$
$m\in\left(-\infty;\ -\frac{3}{8}\right)\cup(0;\ +\infty)$
II) Teraz należy ustalić kiedy pierwiastki są mniejsze od 4. Jest na to kilka różnych sposobów.
Mając równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$ pierwiastki to $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
i o ile $a>0$ to $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ jest pierwiastkiem większym.
Mamy więc rozwiązać nierówność $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}<4$ czyli $\frac{-(2m+1)+\sqrt{16m^2+6m}}{2}<4$ czyli
$-(2m+1)+\sqrt{16m^2+6m}<8$ lub też $\sqrt{16m^2+6m}<8+2m+1$
$\sqrt{16m^2+6m}<9+2m$ $\Delta>0$ więc śmiało podnosimy do kwadratu
$16m^2+6m<(9+2m)^2$
$16m^2+6m<81+36m+4m^2$
$16m^2-4m^2+6m-36m-81<0$
$12m^2-30m-81<0|:3$
$4m^2-10m-27<0$
$\Delta=100-4\cdot 4\cdot(-81)=100+432=532$ $\sqrt{532}=\sqrt{4\cdot 133}=2\sqrt{133}$
$m_1=\frac{10-2\sqrt{133}}{2\cdot 4}=\frac{5-\sqrt{133}}{4}$ $m_2=\frac{10+2\sqrt{133}}{2\cdot 4}=\frac{5+\sqrt{133}}{4}$
$m\in\left(\frac{5-\sqrt{133}}{4};\ \frac{5+\sqrt{133}}{4}\right)$
Teraz bierzemy cześć wspólną przedziałów $\left[\left(-\infty;\ -\frac{3}{8}\right)\cup(0;\ +\infty)\right]\cap\left(\frac{5-\sqrt{133}}{4};\ \frac{5+\sqrt{133}}{4}\right)$
Odpowiedź: $m\in\left(\frac{5-\sqrt{133}}{4};\ -\frac{3}{8}\right)\cup\left(0;\ \frac{5+\sqrt{133}}{4}\right)$.

Zad 18. Dany jest promień okręgu r



x; y – długości boków prostokąta wpisanego w okręg

Można skorzystać z Twierdzenia Pitagorasa

$x^2 + y^2 = (2r)^2$ $\qquad$ $x^2 + y^2 = 4r^2$

$y^2 = 4r^2 - x^2$ $\qquad$ $y = \sqrt{4r^2 - x^2}$

Pole prostokąta liczymy ze wzoru $P = x \cdot y$

$P(x) = x \cdot \sqrt{4r^2 - x^2}$ Otrzymaliśmy wzór na pole prostokąta jako funkcję jednej zmiennej $\boldsymbol{x}$

dziedzina: $D = (0; \quad 2r)$ – bok prostokąta musi mieć długość większa od zera i nie może być większy od 2r aby drugi bok tez miał długość większą od zera.

$P(x) = x \cdot \sqrt{4r^2 - x^2} = \sqrt{x^2(4r^2 - x^2)} = \sqrt{4x^2r^2 - x^4}$

Aby było łatwiej obliczyć pochodną wprowadzamy nową funkcję $f(x) = 4x^2r^2 - x^4$

$f'(x) = 8r^2x - 4x^3$

Szukamy ekstremum $8r^2x - 4x^3 = 0 |: 4$

$2r^2x - x^3 = 0$ $\qquad$ $x(2r^2 - x^2) = 0$

$x_1 = 0 \quad \vee \quad 2r^2 - x^2 = 0$

$x_1 = 0$ nie należy do dziedziny. $\quad \vee \quad x^2 = 2r^2 \qquad x = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$

Dla $x = r\sqrt{2}$ mamy maksimum bo gdy do wzoru na pochodną $f'(x) = 8r^2x - 4x^3$ wstawimy $x < r\sqrt{2}$ to będzie $8r^2x > 4x^3$ czyli otrzymamy wartość dodatnią

Natomiast dla $x > r\sqrt{2}$ otrzymamy $8r^2x < 4x^3$ czyli pochodna jest ujemna.

Tak więc jeżeli dla $x = r\sqrt{2}$ funkcja $f(x) = 4x^2r^2 - x^4$ ma ekstremum to i funkcja $P(x) = \sqrt{4x^2r^2 - x^4} = \sqrt{f(x)}$ ma ekstremum

Pozostało policzyć wartość tego maksimum czyli wielkość tego pola prostokąta.

$$P(r\sqrt{2}) = \sqrt{4(r\sqrt{2})^2 r^2 - (r\sqrt{2})^4} = \sqrt{4r^2 \cdot 2 \cdot r^2 - 4r^4} = \sqrt{8r^4 - 4r^4} = \sqrt{4r^4} = 2r^2$$

Odpowiedź: Największe pole prostokąta wpisanego w okrąg wynosi $2r^2$

Warto też zauważyć że tym największym prostokątem wpisanym w okrąg jest kwadrat bo jeżeli $x = r\sqrt{2}$ to też drugi jego bok $y = \sqrt{4r^2 - x^2} = \sqrt{4r^2 - (r\sqrt{2})^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$