Rozwiązania Operon listopad 2017

Zadania zamknięte

Zad 1. $\log_2 \frac{1}{\sqrt{8}} = \log_2 \frac{1}{\sqrt{2^3}} = \log_2 \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \log_2 2^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}\log_2 2 = -\frac{3}{2} \cdot 1 = -\frac{3}{2}$ **(A)**

Zad 2. $a = \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3} = \frac{14\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)}{(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3)} = \frac{14\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)}{2-9} = \frac{14\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)}{-7} = -2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+3\right) = -4 - 6\sqrt{2} \approx$ $-4 - 6 \cdot 1{,}41 = -12{,}48$ (zadanie można też po prostu policzyć kalkulatorem nie wykonując przekształceń) **(B)**

Zad 3. $x = 9n + 7 \;\; x^2 = (9n+7)^2 = 81n^2 + 2 \cdot 9n \cdot 7 + 49 = 81n^2 + 126n + 49 =$ $9(9n^2 + 14n + 5) + 4$ bo $49 = 9 \cdot 5 + \mathbf{4}$ **(B)**

Zad 4. $A = (6;\ -7) \;\; B = (-10;\ 3)$ prosta AB ma współczynnik kierunkowy $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} =$ $\frac{3+7}{-10-6} = \frac{10}{-16} = -\frac{5}{8}$ to symetralna odcinka AB jako prostopadła ma współczynnik $a_2 = -\frac{1}{-\frac{5}{8}} = \frac{8}{5}$ **(B)**

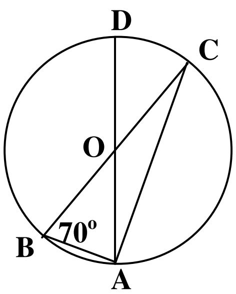
Zad 5. $a_n = \frac{2n+1}{n+3} \;\; a_3 = \frac{2 \cdot 3+1}{3+3} = \frac{7}{6} \;\; a_5 = \frac{2 \cdot 5+1}{5+3} = \frac{11}{8}$ Ciąg $\left(\frac{7}{6};\ x;\ \frac{11}{8}\right)$ arytmetyczny to znaczy $x - \frac{7}{6} = \frac{11}{8} - x \;\Longrightarrow\; 2x = \frac{11}{8} + \frac{7}{6} \;\Longrightarrow\; 2x = \frac{33}{24} + \frac{28}{24} \;\Longrightarrow\; 2x = \frac{61}{24} \;\Longrightarrow x = \frac{61}{48}$ **(A)**

Zad 6. $y = x^2 - 4\sqrt{3}x + 12$ Jeżeli miejsce zerowe jest jedno to $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ Teraz $x_0{}^3 = \left(2\sqrt{3}\right)^3 = 8 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ **(C)**

Zad 7. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ Wiadomo że funkcja potęgowa przyjmuje tylko wartości dodatnie więc odpowiedzi A i D odpadają. Gdyby za x wstawić 2 (C) to $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ widać że prawidłową odpowiedzią jest $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$ **(B)**

Zad 8. W zadaniu jest założenie że ciąg jest nie zerowy więc $a_1 \cdot q^6 + a_1 \cdot q^7 = 0 \;\Longrightarrow\; a_1 \cdot q^6(1+q) = 0 \quad (1+q) = 0 \;\Longrightarrow\; q = -1$ Czyli ciąg jest postaci $a;\ -a;\ a;\ -a;\ a;\ -a; \ldots\ldots$ więc cała suma jest 0 **(D)**

Zad 9.



$\sphericalangle BAC = 90°$ jako kąt wpisany oparty na półokręgu $\sphericalangle BCA = 20°$ jako trzeci kąt w trójkącie ABC $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BCA = 20°$ bo trójkąt AOC równoramienny **(D)**

Zad 10. Trójkąt ABC obwód 16 pole 12

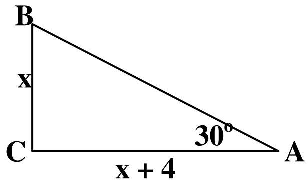
trójkąt DEF obwód x pole 60 Korzystając ze skali podobieństwa mamy $\frac{P_{DEF}}{P_{ABC}} = \frac{60}{12} =$ $5 = k^2 \Longrightarrow k = \sqrt{5}$ - skala podobieństwa $x = 16\sqrt{5}$ **(B)**

Zad 11. $f(x) = (4m-2)x + k - 3$ Z własności funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ wiemy że aby przechodziła przez II i IV ćwiartkę, to musi być malejąca $a < 0$ i przechodzić przez $(0;\ 0)$ $czyli\ b = 0$. Więc $4m - 2 < 0 \Longrightarrow 4m < 2 \Longrightarrow m < \frac{1}{2}$ $k - 3 = 0 \;\Longrightarrow\; k = 3$ **(C)**

Zad 12. $f(x) = x^2 - 4$ przy symetrii wzgl. OX mamy $g(x) = -f(x) = -(x^2 - 4) = -x^2 + 4$ **(C)**

Zad 13. $W = \frac{x-3}{x^2-4x+4}$ Aby określić dziedzinę trzeba ustalić ilość rozwiązań równania z mianownika $x^2 - 4x + 4 = 0$. Można tu stosować tradycyjne rozwiązywanie równani kwadratowego albo zauważyć że zgodnie ze wzorem skróconego mnożenia mamy $(x-2)^2 = 0 \implies x = 2$ czyli $D = R\backslash\{2\}$. **(C)**

Zad 14.



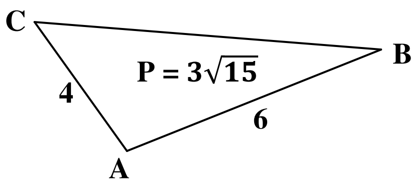
$\tan 30° = \frac{x}{x+4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$3x = \sqrt{3}(x+4) \Longrightarrow 3x = x\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \Longrightarrow 3x - x\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Longrightarrow x(3-\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} \implies x = \frac{4\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \implies x = \frac{4\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} \implies x = \frac{12\sqrt{3}+12}{9-3} \Longrightarrow x = \frac{6(2\sqrt{3}+2)}{6}$ $x = (2\sqrt{3} + 2)$ **(D)**

Zad 15. $(3x+9)^2 > 0$. Jako kwadrat wyrażenia jest ono nieujemne ale dla $x = -3$ $[3 \cdot (-3) + 9]^2 = [-9 + 9]^2 = 0^2 = 0$ Rozwiązanie $R\backslash\{-3\}$ **(C)**

Zad 16. $A = (-\infty;\ 0)$ $B = \langle 0;\ 5\rangle$ Treść zadania nie jest zbyt precyzyjnie napisana ale można się domyślać że chodzi o $B\backslash A = B$. Zbiory są rozłączne więc wykonując odejmowanie nic nie odejmujemy. **(D)**

Zad 17.

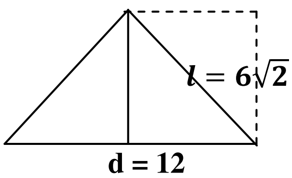


Zgodnie ze wzorem $P = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\alpha$ mamy $3\sqrt{15} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin\alpha$

$3\sqrt{15} = 12\sin\propto \implies \sin\propto = \frac{3}{12}\sqrt{15} \implies \sin\propto = \frac{\sqrt{15}}{4}$ Można dalej nie obliczać bo jeżeli, jak pisze w treści, kąt jest rozwarty więc $\cos\propto < 0$ i jego wartość musi być inna od wartości sinusa $\cos\propto = -\frac{1}{4}$. Można też to obliczyć z jedynki trygonometrycznej $\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1$ **(D)**

Zad 18. Przy czterokrotnym rzucie monetą mamy możliwych 16 wyników $2^4 = 16$. Zdarzeń sprzyjających jest 5 $(rrrr;\ \ orrr; rorr; rror; rrro)$ $P(A) = \frac{5}{16}$ **(B)**

Zad 19.



$d = 12 \implies r = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ Tworząca jest przekątną kwadratu o boku 6 $\boldsymbol{l} = \mathbf{6\sqrt{2}}$

$P_{pc} = \pi r^2 + \pi rl = \pi 6^2 + \pi \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2} = (36 + 36\sqrt{2})\pi = 36\pi(1 + \sqrt{2})$ **(B)**

Zad 20. $S_n = 3n^2 + 4n$ to: $S_1 = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 3 + 4 = 7 = a_1$

$S_2 = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = 3 \cdot 4 + 8 = 12 + 8 = 20 = a_1 + a_2$ $\quad a_1 + a_2 = 7 + a_2 = 20$

$a_2 = 20 - 7 = 13$ $\quad r = a_2 - a_1 = 13 - 7 = 6$

$a_5 = a_1 + 4r = 7 + 4 \cdot 6 = 7 + 24 = 31$ **(B)**

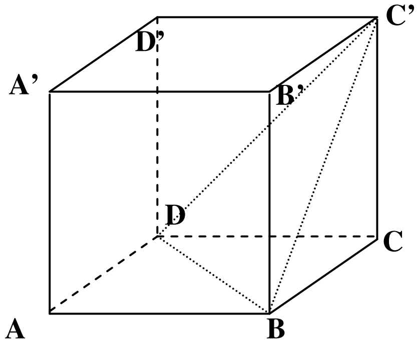
Zad 21. $f(x) = (m+3)x^2 + 16x + 5$ $\quad p = 2$ $\ p = \frac{-b}{2a} = \frac{-16}{2(m+3)} = 2$

$\frac{-16}{2(m+3)} = 2 \implies -16 = 2 \cdot 2(m+3) \implies -16 = 4m + 12 \implies 4m = -28 \implies m = -7$

$f(x) = (-7+3)x^2 + 16x + 5 = -4x^2 + 16x + 5$

$f(2) = -4(2)^2 + 16 \cdot 2 + 5 = -16 + 32 + 5 = 21$ $\ q = 21$ - szukana wartość **(D)**

Zad 22.



Trójkąt BDC' jest równoboczny bo każdy jego bok jest przekątną kwadratu (ściany sześcianu) i boki tego trójkąta mają długość $a\sqrt{2}$ podstawiając teraz to do wzoru na pole trójkąta równobocznego otrzymujemy $P = \frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **(B)**

Zad 23. Jeżeli $x + \frac{1}{x} = 6$ to $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 36$

a $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ otrzymaliśmy $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 36$ czyli $x^2 + \frac{1}{x^2} = 36 - 2$

i ostatecznie $x^2 + \frac{1}{x^2} = 34$ **(D)**

Zadania otwarte

Zad 24. $(4x-1)^2 < (2-5x)^2$

$16x^2 - 2 \cdot 4x + 1 < 4 - 2 \cdot 2 \cdot 5x + 25x^2$

$16x^2 - 25x^2 - 8x + 20x + 1 - 4 < 0$

$-9x^2 + 12x - 3 < 0$ | : (-3) (dzielenie przez ujemną zmiana znaku nierówności)

$3x^2 - 4x + 1 > 0$

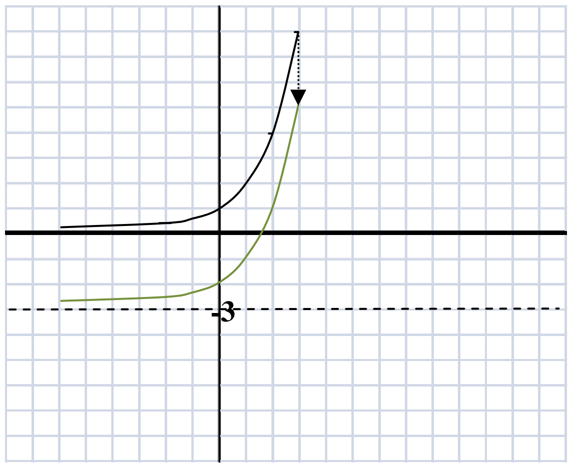
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4$ $\quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1$

Wykres gałęziami do góry (a = 3) więc wartości większe od zera są dla:

$x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$

Zad 25. $f(x) = 2^x - 3$



Zbiór wartości $y \in (-3;\ +\infty)$

Zad 26. Jeżeli $a < 1$ to $\frac{1}{1-a} \geq 4a$ Przekształcamy wyrażenie $\frac{1}{1-a} \geq 4a$

$\frac{1}{1-a} - 4a \geq 0$

$\frac{1}{1-a} - \frac{4a(1-a)}{1-a} \geq 0$

$\frac{1-4a(1-a)}{1-a} \geq 0$

$\frac{1-4a+4a^2}{1-a} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{4a^2-4a+1}{1-a} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{(2a-1)^2}{1-a} \geq 0$ to dla $a < 1$ ma licznik jako kwadrat pewnej liczby i mianownik nie ujemny więc całość jest ≥ 0.

Zad 27. $f(x) = x^2 + bx + c$ miejsca zerowe $x_1 = -4 \quad x_2 = 2$ dla miejsc zerowych $f(x) = 0$

czyli $\begin{cases} (-4)^2 - 4b + c = 0 \\ 2^2 + 2b + c = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -4b + c = -16 \\ 2b + c = -4 \end{cases}$ teraz odejmując od I równania II {dodając pomnożone przez (-1)} $-6b = -12 \implies b = 2$ teraz przekształcając np. II równanie mamy $c = -2b - 4 = -2 \cdot 2 - 4 = -4 - 4 = -8$ Odpowiedź $b = 2; \quad c = -8$

II sposób: mając miejsca zerowe zapisać postać iloczynową $f(x) = (x+4)(x-2)$ i wykonać mnożenie sum algebraicznych $f(x) = x^2 - 2x + 4x - 8$ i ostatecznie $f(x) = x^2 + 2x - 8$

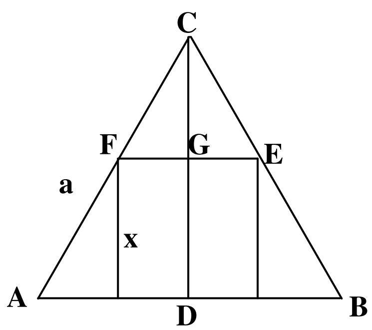
Odpowiedź $b = 2; \quad c = -8$

Zad 28. $(3^a;\ 3^b;\ 3^c)$ - ciąg geometryczny $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$ czyli $\frac{3^b}{3^a} = \frac{3^c}{3^b}$ dalej $3^b \cdot 3^b = 3^a \cdot 3^c$ teraz zgodnie z prawami działań na potęgach $b + b = a + c$ *czyli* $2b = a + c$ lub $b = \frac{a+c}{2}$ a to jest własność ciągu arytmetycznego $a_2 = \frac{a_1+a_3}{2}$

Zad 29. Przy trzykrotnym rzucie kostką wszystkich zdarzeń jest $6^3 = 216 \quad \overline{\overline{\Omega}} = 216$ począwszy od zdarzenia (1; 1; 1) a skończywszy na (6; 6; 6) Zdarzeń sprzyjających czyli takich że suma oczek jest 16 i więcej jest 10 $\overline{\overline{A}} = 10 \quad A = \begin{Bmatrix} (4;6;6); (6;4;6); (6;6;4); (5;5;6); (5;6;5) \\ (6;5;5); (5;6;6); (6;5;6); (6;6;5); (6;6;6) \end{Bmatrix}$

Odp.: $P(A) = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$

Zad 30.



Trójkąty ADC i FGC są podobne (mają odpowiednie kąty równe). $|AB| = |BC| = |CA| = a$

$|AD| = \frac{1}{2}a$ $|CD| = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ - wysokość trójkąta równobocznego.

$|DG| = x$ – szukany bok kwadratu $|FG| = \frac{1}{2}x$ $|CG| = h - x = \frac{a\sqrt{3}}{2} - x$

Korzystając w proporcjonalności boków w trójkątach podobnych mamy $\frac{AD}{DC} = \frac{FG}{CG}$ $\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}-x}$

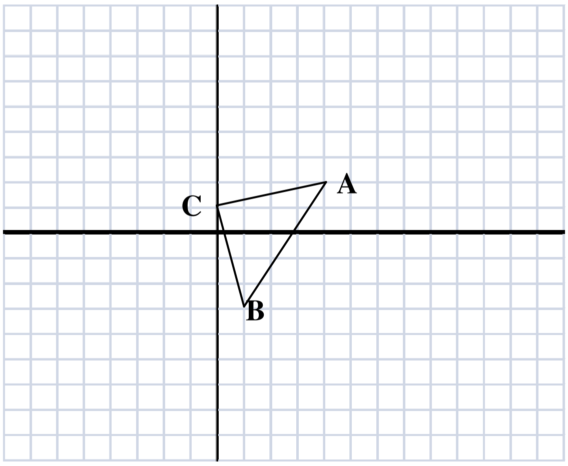
wymnażając na krzyż mamy $\frac{1}{2}a \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - x\right) = \frac{1}{2}x \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{ax}{2} = \frac{ax\sqrt{3}}{4} \implies \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{2ax}{4} = \frac{ax\sqrt{3}}{4} \implies a^2\sqrt{3} - 2ax = ax\sqrt{3} \implies -2ax - ax\sqrt{3} = - a^2\sqrt{3} \implies x(-2a - a\sqrt{3}) = - a^2\sqrt{3}$

$x = \frac{-a^2\sqrt{3}}{-2a-a\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{a(2+\sqrt{3})} = \frac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2a\sqrt{3}-3a}{4-3} = a(2\sqrt{3} - 3)$

$x = a(2\sqrt{3} - 3)$

Zad 31. A = (4; 2) B = (1; -3) C = (0; y) $\sphericalangle ACB = 90°$



Proste AC i BC mają być prostopadłe czyli ich współczynniki kierunkowe mają spełniać warunek $a_1 \cdot a_2 = -1$

Dla prostej AC mamy $a_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-2}{0-4} = \frac{y-2}{-4} = \frac{1}{4}(2 - y)$

dla prostej BC mamy $a_2 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y+3}{0-1} = \frac{y+3}{-1} = -y - 3$

$a_1 \cdot a_2 = \frac{1}{4}(2 - y)(-y - 3) = -1$

$\frac{1}{4}(-2y - 6 + y^2 + 3y) = -1$

$\frac{1}{4}(y^2 + y - 6) = -1$ | mnożąc przez 4 mamy

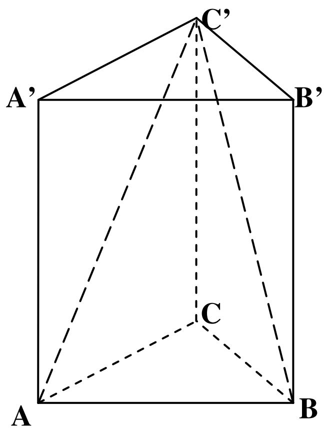
$y^2 + y - 6 = -4$

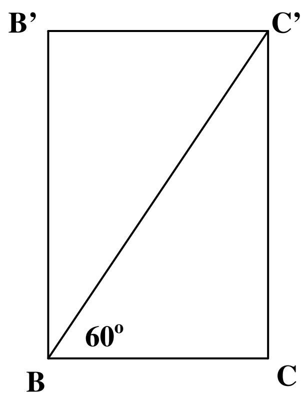
$y^2 + y - 2 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$ $y_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{2\cdot1} = \frac{-4}{2} = -2$ $y_2 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ Zadanie ma dwa rozwiązania $C_1 = (0; -2)$ $C_2 = (0; 1)$

II sposób (moim zdaniem dłuższy i bardziej skomplikowany) Trójkąt ABC ma być prostokątny z przeciwprostokątną AB i przyprostokątnymi AC i BC Korzystając ze wzoru na długość odcina w układzie współrzędnych a następnie z Twierdzenia Pitagorasa otrzymamy rozwiązanie.

Zad 32.



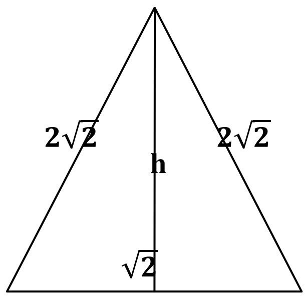


$P_{SC} = 2\sqrt{3}$ $\quad \tan 60^\circ = \frac{CC'}{BC} = \sqrt{3} \implies CC' = BC\sqrt{3}$ $P_{SC} = BC \cdot BC\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$BC \cdot BC = 2 \implies BC = \sqrt{2}$

$\cos 60^\circ = \frac{BC}{BC'} = \frac{1}{2} \implies BC' = 2\sqrt{2}$

Należy policzyć pole trójkąta równoramiennego ABC’



$h^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \implies h^2 = 4 \cdot 2 - \frac{2}{4} \implies h^2 = 8 - \frac{1}{2} \implies h^2 = 7\frac{1}{2} \implies h^2 = \frac{15}{2}$

$h = \sqrt{\frac{15}{2}} = \sqrt{\frac{30}{4}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$ $\quad P = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{\sqrt{30}}{2} = \frac{\sqrt{60}}{4} = \frac{\sqrt{4 \cdot 15}}{4} = \frac{2\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

Odpowiedź $P = \frac{\sqrt{15}}{2}$