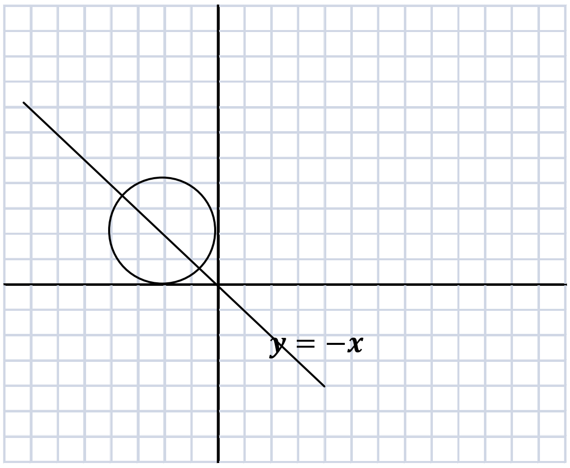
# PRZYKŁADOWY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI
# POZIOM ROZSZERZONY (przed nową formułą)
## Grudzień 2014r

<u>Zadania zamknięte</u>

***Zad 1.*** $W(x) = 2x^3 - bx^2 - 1$ dzieli się przez $x + 1$ oznacza to że liczba $x = -1$ jest pierwiastkiem,
czyli: $W(-1) = 2(-1)^3 - b(-1)^2 - 1 = 0$

$-2 - b - 1 = 0 \qquad -b - 3 = 0 \qquad b = -3$ **(A)**

***Zad 2.*** $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$




**(C)**

***Zad 3.*** $f(x) = x^5 + 5x - 1$

$f'(x) = 5x^4 + 5$ Aby istniało ekstremum lokalne warunkiem koniecznym jest $f'(x) = 0$

$5x^4 + 5 = 0 |: 5 \quad \Longrightarrow \quad x^4 + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^4 = -1$ sprzeczność **(D)**

***Zad 4.*** $x \in \left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3}{4}\pi\right)$ $\tan x \in (-\infty;\ -1)$ więc $\tan x$ w tym przedziale jest mniejsze od $\sin x$ bądź $\cos x$ **(C)**

***Zad 5.*** $f(x) = 3^{x-2} + 3$ oraz $y = 3{,}3$

Funkcja wykładnicza $f(x) = 3^{x-2} + 3$ jest rosnąca na całym zbiorze R oraz tutaj przesunięta o 3 jednostki do góry. Tak więc w $-\infty$ ma granicę 3 a w $+\infty$ granicę $+\infty$

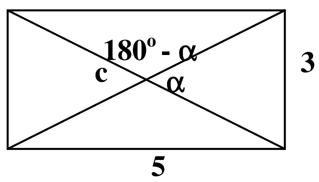
Funkcja $y = 3{,}3$ jest stała czyli wykresem jest linia prosta równoległa do OX na wysokości 3,3.

Wykresy takie przecinają się w 1 punkcie **(B)**

***Zad 6.*** $a - b = 4 \quad ab = 7 \quad a^3b + ab^3 = ab(a^2 + b^2) = ab[(a - b)^2 + 2ab]$

$ab[(a - b)^2 + 2ab] = 7[4^2 + 2 \cdot 7] = 7(16 + 14) = 7 \cdot 30 = 210$

***Zad 7.***




$c^2 = 5^2 + 3^2 \quad c^2 = 25 + 9 \quad c = \sqrt{34}$

Wiemy że: $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$

Pole prostokąta można policzyć na 2 sposoby:

$P = 5 \cdot 3 = 15$ Ale prostokąt to też 4 trójkąty o bokach $\frac{\sqrt{34}}{2}$ i kącie $\alpha$ bądź $180° - \alpha$

$P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{34}}{2} \cdot \frac{\sqrt{34}}{2} \cdot \sin\alpha = \frac{34}{2}\sin\alpha = 17\sin\alpha$

$17\sin\alpha = 15 \qquad \sin\alpha = \frac{15}{17}$

***Zad 8.*** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2} - \frac{(n+2)^2}{n+444}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2+4n+4}{n+444}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2(n+444)}{(n+2)(n+444)} - \frac{(n^2+4n+4)(n+2)}{(n+444)(n+2)}\right) =$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2(n+444)-(n^2+4n+4)(n+2)}{(n+2)(n+444)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+444n^2-n^3-2n^2-4n^2-8n-4n-8}{n^2+444n+2n+888}\right) =$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{438n^2-12n-8}{n^2+446n+888}\right) = 438$

***Zad 9.*** $f(x)=\frac{x^2}{x-4}$ $\quad x\neq 4$

$f'(x)=\frac{2x(x-4)-x^2\cdot 1}{(x-4)^2}=\frac{2x^2-8x-x^2}{(x-4)^2}=\frac{x^2-8x}{(x-4)^2}$

$f'(12)=\frac{12^2-8\cdot 12}{(12-4)^2}=\frac{144-96}{8^2}=\frac{48}{64}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}=0{,}75$

***Zad 10.*** $f(x)=x^4$ $\quad f'(x)=4x^3$ styczna ma być równoległa do $y=4x+7$

Czyli styczna ma nieć współczynnik kierunkowy $a=4$

Wiemy że pochodna w punkcie równa się współczynnikowi kierunkowemu stycznej.

Mamy więc $4x^3=4 \quad\Rightarrow\quad x^3=1 \quad\Rightarrow\quad x=1$ Styczna do $f(x)=x^4$ ma punkt styczności w punkcie $x=1$ $f(1)=1^4=1$ punkt styczności to $A=(1;\quad 1)$

Styczna ma więc postać: $f(x)=4x+b$ i $f(1)=1$

czyli $4\cdot 1+b=1 \quad\Rightarrow\quad b=1-4 \quad\Rightarrow\quad b=-3$

Równanie stycznej to: $f(x)=4x-3$

***Zad 11.*** $\sin 5x-\sin x=0$ Korzystamy ze wzoru $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ i otrzymujemy

$2\cos\frac{5x+x}{2}\cdot\sin\frac{5x-x}{2}=0 \qquad 2\cos 3x\cdot\sin 2x=0|:2$

$\cos 3x\cdot\sin 2x=0$ jeżeli iloczyn wynosi 0 to

$\cos 3x=0 \quad\vee\quad \sin 2x=0$

$3x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad\vee\quad 2x=k\pi \qquad k\in C$

$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \quad\vee\quad x=\frac{k\pi}{2} \qquad k\in C$

***Zad 12.*** $P_n$ pole koła o promieniu $r=\frac{1}{2^n}$ Jest to ciąg geometryczny zbieżny

$P_1=\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4} \qquad P_2=\pi\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{\pi}{16} \qquad P_3=\pi\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{\pi}{64}$

mamy więc $a_1=\frac{\pi}{4} \qquad q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{\pi}{16}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\pi}{64}}{\frac{\pi}{16}}=\frac{1}{4}$

Albo bardziej ogólnie $P_n=\pi\left(\frac{1}{2^n}\right)^2=\frac{\pi}{4^n} \qquad P_{n+1}=\frac{\pi}{4^{n+1}} \qquad q=\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{\frac{\pi}{4^{n+1}}}{\frac{\pi}{4^n}}=\frac{\pi}{4^{n+1}}\cdot\frac{4^n}{\pi}=\frac{1}{4}$

$q=\left|\frac{1}{4}\right|<1$ ciąg zbieżny

$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{\pi}{3}$

***Zad 13.*** $\frac{a}{2+a^3}<\frac{b}{2+b^3}$ gdy $a>b\geq 1$ Przekształcając podana nierówność mamy:

$a(2+b^3)<b(2+a^3)$

$2a+ab^3<2b+ba^3 \quad\Rightarrow\quad 2a-2b<a^3b-ab^3$

$2(a-b)<ab(a^2-b^2) \quad\Rightarrow\quad 2(a-b)<ab(a-b)(a+b)|:(a-b)$

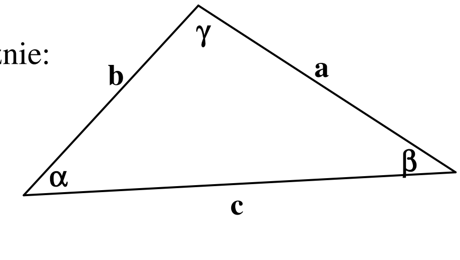
$(a-b)$ ma wartość dodatnią bo mamy założenie że $a>b\geq 1$ więc dzielenie przez tą różnicę nie zmienia znaku nierówności.

$2<ab(a+b)$ Ta nierówność jest już wyraźnie prawdziwa dla założonych $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ gdyż mamy: $a+b>2$ jako suma liczb $\geq 1$ natomiast $ab>1$ jako iloczyn liczb $\geq 1$. Mamy więc:

$ab(a+b)>1\cdot 2=2$

***Zad 14.*** Udowodnić że dla kątów dowolnego trójkąta, jeżeli $\sin^2\alpha+\sin^2\beta<\sin^2\gamma$ to $\cos\gamma<0$

Z twierdzenia sinusów mamy: $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$




$a=2R\cdot\sin\alpha \quad \sin\alpha=\frac{a}{2R}$ oraz analogicznie:

$\sin\beta=\frac{b}{2R} \qquad \sin\gamma=\frac{c}{2R}$

czyli mamy $\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2<\left(\frac{c}{2R}\right)^2$ czyli

$\frac{a^2}{4R^2}+\frac{b^2}{4R^2}<\frac{c^2}{4R^2}|\cdot 4R^2$ $a^2+b^2<c^2$ Teraz za $c^2$ wstawiamy z twierdzenia cosinusów

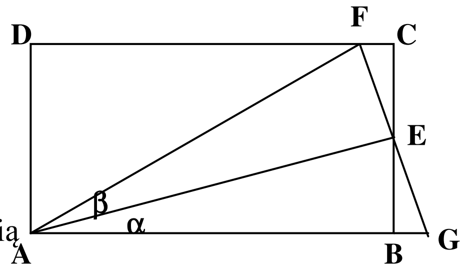
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ i otrzymujemy:

$a^2+b^2<a^2+b^2-2ab\cos\gamma$

$2ab\cos\gamma<a^2+b^2-(a^2+b^2)$ $\Longrightarrow$ $2ab\cos\gamma<0|:2ab$ $2ab>0$

$\cos\gamma<0$

***Zad 15.*** Przedłużamy odcinek FE oraz bok AB tak aby się przecięły i powstaje punkt G




Trójkąty ECF i BGE są przystające bo są prostokątne oraz $\sphericalangle BEG=\sphericalangle FEC$ kąty wierzchołkowe a odcinki $|EC|=|EB|=\frac{1}{2}|BC|$. Tak więc |EG| = |EF|

Mamy więc trójkąt AGF równoramienny z wysokością AE a wysokość w trójkącie równoramiennym dzieli kąt przy wierzchołku na połowy $\alpha=\beta$

***Zad 16.*** Trzykrotny rzut kostką

$\overline{\overline{\Omega}}=6^3=216$

B – otrzymanie co najmniej jednej szóstki B' – nie otrzymanie żadnej szóstki

$\overline{\overline{B'}}=5^3=125$ $\overline{\overline{B}}=216-125=91$ $P(B)=\frac{91}{216}$

A – otrzymanie co najmniej jednej jedynki.

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$A\cap B$ - zdarzenie polegająca na tym że wypada co najmniej jedna jedynka i jednocześnie co najmniej jedna szóstka.

a) zakładamy że wypada dokładnie 1 jedynka 1 szóstka i na trzeciej kostce element ze zbioru: $\{2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ - takich możliwości mamy $4\cdot 3!=4\cdot 2\cdot 3=24$

4 - bo podany zbiór jest 4 – elementowy; 3! - bo mamy 3 kostki a więc wyniki mogą permutować między trzema kostkami.

b) zakładamy że wypadnie 2 jedynki i jedna szóstka $\{116;\ \ 161;\ \ 611\}$- 3 wyniki

c) zakładamy ze wypadnie 2 szóstki i jedynka – analogicznie 3 wyniki.

$\overline{\overline{A\cap B}}=24+3+3=30$ $P(A\cap B)=\frac{30}{216}$ $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{30}{216}}{\frac{91}{216}}=\frac{30}{91}$

Odpowiedź: Przy trzykrotnym rzucie kostką prawdopodobieństwo wypadnięcia przynajmniej jednej jedynki pod warunkiem że wypadła przynajmniej jedna szóstka wynosi $\frac{30}{91}$

***Zad 17.***

$(x-3)^2+(y-1)^2=1$ Okrąg ten ma środek w punkcie $S=(3;\ \ 1)$ i promień $r=\sqrt{1}=1$ okręgi styczne do tego okręgu mają być także styczne do osi OX i OY.

Aby okrąg był styczny do osi musi spełniać warunek $S=(r;\ \ r)$

Okręgi leżą w I ćwiartce więc współrzędne środka jak i promień są liczbami dodatnimi

$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

Mamy więc dany okrąg o środku $S_1=(3;\ \ 1)$ i promieniu 1 oraz okrąg o środku $S_2=(r;\ \ r)$ i promieniu r. Odległość między środkami wynosi $r+1$, odległość tą można też policzyć ze wzoru na długość odcinka: $|S_1S_2|=\sqrt{(3-r)^2+(1-r)^2}=r+1$ po podniesieniu do kwadratu mamy:

$(3-r)^2+(1-r)^2=(r+1)^2$

$9-6r+r^2+1-2r+r^2=r^2+2r+1$

$2r^2-r^2-8r-2r+10-1=0$

$r^2-10r+9=0$

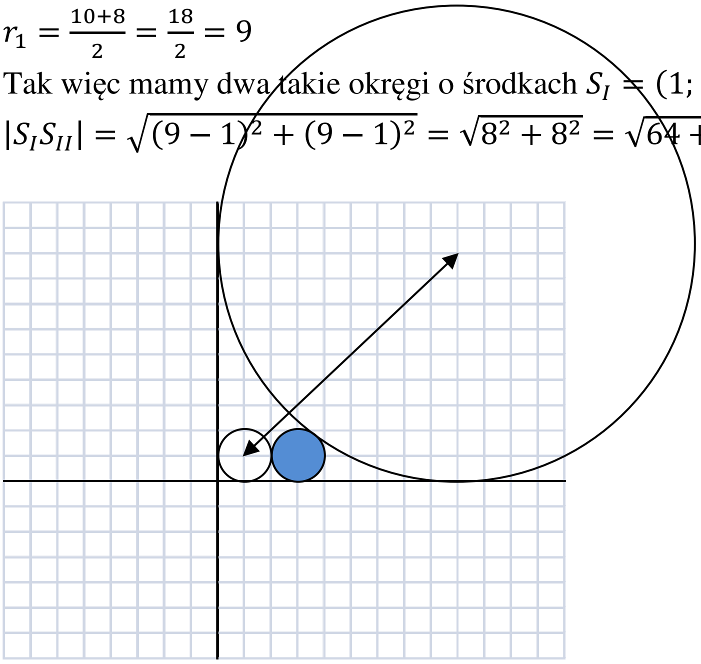
$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 100 - 36 = 64 \qquad \sqrt{64} = 8$

$r_1 = \frac{10-8}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$r_1 = \frac{10+8}{2} = \frac{18}{2} = 9$

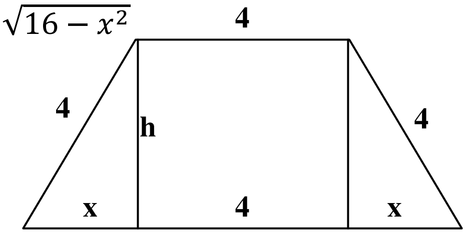
Tak więc mamy dwa takie okręgi o środkach $S_I = (1;\ \ 1)$ oraz $S_{II} = (9;\ \ 9)$

$|S_I S_{II}| = \sqrt{(9-1)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{64 + 64} = \sqrt{2 \cdot 64} = 8\sqrt{2}$



***Zad 18.*** Stosując oznaczenia jak na rysunku mamy:

$h^2 + x^2 = 4^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 16 - x^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{16 - x^2}$




$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$ czyli $P = \frac{1}{2}(x + 4 + x + 4) \cdot \sqrt{16 - x^2}$

$P = \frac{1}{2}(2x + 8) \cdot \sqrt{16 - x^2} = (x + 4)\sqrt{16 - x^2}$

$P(x) = (x + 4)\sqrt{16 - x^2}$

mamy więc pole trapezu jako funkcja zmiennej x

Interesuje nas dziedzina tej funkcji tylko $x \in (0;\ \ 4)$. Zadanie zakłada że podstawa dolna jest większa od górnej więc $x > 0$ a dla $x > 4$ wysokość by nie istniała.

***Zakładając że obecnie uczeń szkoły średniej nie potrafi obliczyć pochodnej z pierwiastka trzeba posłużyć się fortelem***

$\boldsymbol{P(x) = (x+4)\sqrt{16 - x^2} = \sqrt{(x+4)^2(16 - x^2)}}$ ***i korzystając z faktu że funkcja pierwiastek dla liczb dodatnich jest rosnąca posługiwać się dalej funkcją:*** $\boldsymbol{P(x) = (x+4)^2(16 - x^2)}$ ***i obliczać jej pochodną dla poszukania ekstremum.***

Wiedząc jednak że dla $f(x) = \sqrt{x}$ mamy: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ oraz znając pojęcie pochodnej funkcji złożonej $\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ możemy policzyć:

$P'(x) = (x+4)' \cdot \sqrt{16 - x^2} + (x+4) \cdot \sqrt{16 - x^2}' = 1 \cdot \sqrt{16 - x^2} + (x+4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{16 - x^2}} \cdot (16 - x^2)'$

$P'(x) = \sqrt{16 - x^2} + \frac{x+4}{2\sqrt{16 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{\left(\sqrt{16 - x^2}\right)^2}{\sqrt{16 - x^2}} - \frac{x(x+4)}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{16 - x^2 - x^2 - 4x}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{-2x^2 - 4x + 16}{\sqrt{16 - x^2}}$

Mamy więc $P'(x) = \frac{-2x^2 - 4x + 16}{\sqrt{16 - x^2}}$

Obliczamy $\frac{-2x^2 - 4x + 16}{\sqrt{16 - x^2}} = 0$ czyli szukamy dla jakiego x istnieje ekstremum. Mianownik tego ułamka jest na pewno $> 0$ więc można zapisać:

$-2x^2 - 4x + 16 = 0 | : 2$

$-x^2 - 2x + 8 = 0 | : 2$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 4 + 32 = 36 \qquad \sqrt{36} = 6$

$x_1 = \frac{2-6}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad x_2 = \frac{2+6}{-2} = \frac{8}{-2} = -4 \quad x_2 = -4$ nie spełnia warunków zadania

Mamy więc odpowiedź $x = 2$ i jest to oczywiste że jest to maksimum bo dla $x < 2$ wartość pochodnej jest dodatnia a dla $x > 2$ ujemna

Dla x = 2 mamy wymiary trapezu $a = 2x + 4 = 2 \cdot 2 + 4 = 4 + 4 = 8$ - podstawa dolna
$b = 4$ - podstawa górna $h = \sqrt{16 - x^2} = \sqrt{16 - 2^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
$P = \frac{1}{2}(8 + 4)2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$