Matura poprawkowa sierpień 2017r

Zadania zamknięte

Zad 1. $a = -2\ b = 3$ $\quad a^b - b^2 = (-2)^3 - 3^{-2} = -8 - \frac{1}{3^2} = -8 - \frac{1}{9} = -\frac{73}{9}$ **(C)**

Zad 2. $9^9 \cdot 81^2 = 9^9 \cdot (9^2)^2 = 9^9 \cdot 9^4 = 9^{9+4} = 9^{13}$ **(C)**

Zad 3. $\log_4 8 + 5\log_4 2 = \log_4 8 + \log_4 2^5 = \log_4 8 + \log_4 32 = \log_4(8 \cdot 32) = \log_4 256 = \log_4 4^4 = 4 \cdot \log_4 4 = 4 \cdot 1 = 4$ **(B)**

Zad 4. $P = \pi r^2$ $\quad r_2 = 1{,}3r$ $\quad P_2 = \pi(1{,}3r)^2 = 1{,}69\pi r^2$ pole wzrosło o 69% **(D)**

Zad 5. $(2\sqrt{7} - 5)^2 \cdot (2\sqrt{7} + 5)^2 = (28 - 2 \cdot 2\sqrt{7} \cdot 5 + 25) \cdot (28 + 2 \cdot 2\sqrt{7} \cdot 5 + 25) = (53 - 20\sqrt{7}) \cdot$
$(53 + 20\sqrt{7}) = 53^2 - (20\sqrt{7})^2 = 1849 - 400 \cdot 7 = 2809 - 2800 = 9$ **(A)**

Zad 6. $11 \le 2x - 7 \le 15$ Mamy więc do rozwiązania dwie nierówności:
$11 \le 2x - 7$ oraz $2x - 7 \le 15$
$-2x \le -11 - 7$ $\quad 2x \le 15 + 7$
$-2x \le -18 | :(-2)$ $\quad 2x \le 22 | :2$
$x \ge 9$ $\quad x \le 11$ Liczby większe (lub równe) od 9 a mniejsze (lub równe) 11są zaznaczone na wykresie: **(D)**

Zad 7. Obwód prostokąta o bokach a i b wynosi 60 więc $2(a + b) = 60$
Jeden bok jest większy od drugiego o 10 więc $a + 10 = b$ ewentualnie $a - b = 10$ **(A)**

Zad 8. $\frac{x+1}{x+2} = 3$ $\quad x \ne 2$
$\frac{x+1}{x+2} - 3 = 0$ sprowadzamy do wspólnego mianownika
$\frac{x+1}{x+2} - \frac{3(x+2)}{x+2} = 0$ $\quad \frac{x+1-3x-6}{x+2} = 0$
$\frac{-2x-5}{x+2} = 0$ jeżeli ułamek równy jest 0 to jego licznik = 0
$-2x - 5 = 0$ $\quad -2x = 5 | :(-2)$ $\quad x = -2{,}5$
$-2{,}5 \in \langle -5;\ -2)$ **(D)**

Zad 9. $3x + 4x + 5x = 100$
$12x = 100 | :12$ $\quad x = 8\frac{1}{3}$ $\quad 5x = 5 \cdot 8\frac{1}{3} = 40\frac{5}{3} = 41\frac{2}{3}$. **(A)**

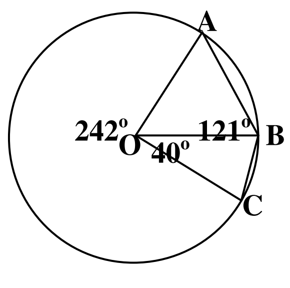
Zad 10. $f(x) = ax^2 + bx + c$
Mamy gałęzie do góry więc $a > 0$. Wykres przecina oś OY powyżej $(0;\ 0)$, czyli $c > 0$
Dalej widzimy że wierzchołek wykresu leży w IV ćwiartce więc pierwsza jego współrzędna
$p > 0$ $\quad p = -\frac{b}{2a}$ z tego wynika że $b < 0$ gdyż mamy $a > 0$ i $p > 0$ **(A)**

Zad 11. $a_1 = 2$ $\quad a_2 = 9$ $\quad a_n = 79$ $\quad r = a_2 - a_1 = 9 - 2 = 7$
$a_n = a_1 + (n-1)r$ $\quad 79 = 2 + (n-1)7$
$79 = 2 + 7n - 7$ $\quad 7n = 79 + 5$ $\quad 7n = 84 | :7$ $\quad n = 12$ **(C)**

Zad 12. $(81;\ 3x;\ 4)$ ciąg geometryczny $a_1 = 81;$ $\quad a_3 = 4;$ $\quad a_3 = a_1 \cdot q^2$
$4 = 81 \cdot q^2$ $\quad q^2 = \frac{4}{81}$ $\quad q = \sqrt{\frac{4}{81}} = \frac{2}{9}$ $\quad a_2 = 3x = a_1 \cdot q$
$3x = 81 \cdot \frac{2}{9} = 9 \cdot 2 = 18$ $\quad x = 18 : 3 = 6$ **(B)**

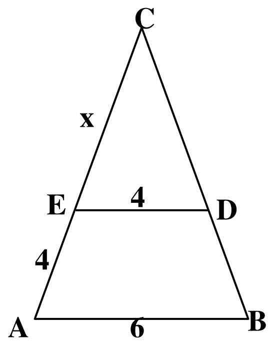
Zad 13. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ to z jedynki trygonometrycznej mamy:
$\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$
$\frac{4 \cdot 6}{49} + \cos^2\alpha = 1$ $\quad \cos^2\alpha = 1 - \frac{24}{49} = \frac{49}{49} - \frac{24}{49} = \frac{25}{49}$
$\cos\alpha = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$ **(B)**

Zad 14. Kąt ABC jest kątem wpisanym $\sphericalangle ABC = 121°$
Odpowiadający mu kąt $\sphericalangle AOC = 242°$
(kąt wklęsły) środkowy oparty na tym samym łuku
Kąt środkowy wypukły $\sphericalangle AOC = 360° - 242° = 118°$
Szukany kąt $\sphericalangle AOB = 118° - 40° = 78°$



(D)

Zad 15. Trójkąty ABC i EDC są podobne choćby dlatego że odcinek ED jest równoległy do AB. Stąd mamy:



$\frac{x}{4} = \frac{x+4}{6}$ $\quad$ $6x = 4(x+4)$

$6x = 4x + 16$ $\quad$ $6x - 4x = 16$ $\quad$ $2x = 16$

$x = 8$

(C)

Zad 16. $P = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ Pole trójkąta równobocznego

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} | \cdot 4$ $\quad$ $a^2\sqrt{3} = 24\sqrt{3} | : \sqrt{3}$

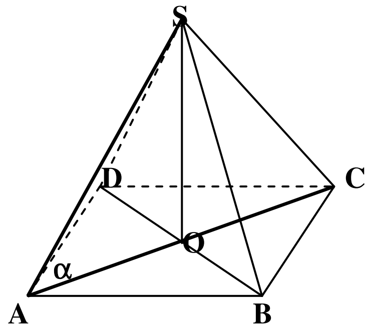
$a^2 = 24$ $\quad$ $a = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$ **(C)**

Zad 17. $B = (-2;\ \ 4)$ $\quad$ $C = (5;\ \ 1)$

$|BC| = \sqrt{\left(5-(-2)\right)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$ długość boku kwadratu

$P = a^2 = \left(\sqrt{58}\right)^2 = 58$ **(C)**

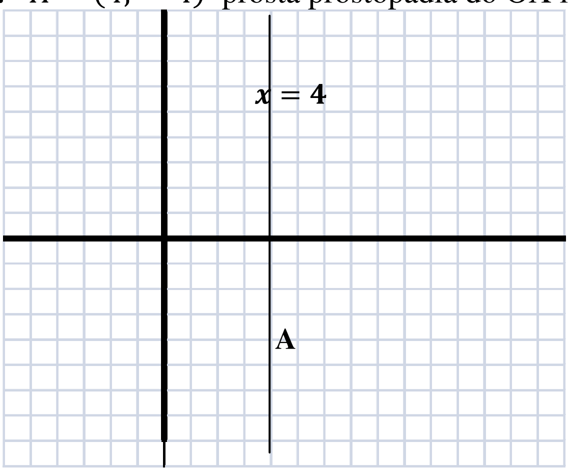
Zad 18. Kąt krawędzi SA z podstawą to kąt krawędzi z przekątną podstawy AO czyli kąt SAO



(A)

Zad 19. $14:2 = 7$ czyli graniastosłup ma 7 wierzchołków na dole i 7 na górze $7 \cdot 3 = 21$ krawędzi jest 21 bo po 7 przy jednej i drugiej podstawie oraz 7 bocznych. **(B)**

Zad 20. $A = (4;\ \ -4)$ prosta prostopadła do OX i przechodząca przez $A = (4;\ \ -4)$ ma postać $x = 4$

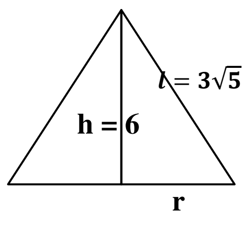


czyli $x - 4 = 0$ **(A)**

Zad 21. $y = ax + b$ gdzie $a = \tan\alpha$ czyli $a = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Podany punkt przecięcia z osią OY wskazuje że $b = -\sqrt{3}$ więc mamy $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ **(A)**

Zad 22. $6^2 + r^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2$



$36 + r^2 = 9 \cdot 5$ $\quad$ $r^2 = 45 - 36 = 9$

$r = \sqrt{9} = 3$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 6 = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 6 = 18\pi$ **(B)**

Zad 23. $\frac{x+2+4+6+8+10+12+14}{8} = 9$

$\frac{x+56}{8} = 9 | \cdot 8$ $\quad$ $x + 56 = 72$ $\quad$ $x = 72 - 56 = 16$

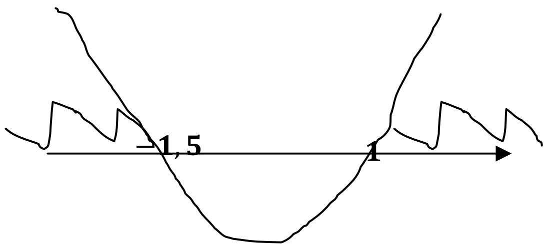
Uporządkowany zbiór ma więc postać $\{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14;\ 16\}$
mediana to będzie średnia z liczb środkowych $\frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9$ **(B)**

Zad 24. $a_1 = 1000 \qquad a_n = 2016 \qquad r = 1$
$a_n = a_1 + (n-1)r \qquad 2016 = 1000 + (n-1) \cdot 1$
$2016 = 1000 + n - 1 \qquad n = 2016 - 999 = 1017$ **(D)**

Zad 25. $\bar{\bar{A}} = 6 \qquad \bar{\bar{\Omega}} = 6 + n \qquad P(A) = \frac{1}{3} = \frac{6}{6+n}$
$6 + n = 6 \cdot 3 \qquad 6 + n = 18$
$n = 18 - 6 = 12$ **(D)**

<u>Zadania otwarte</u>

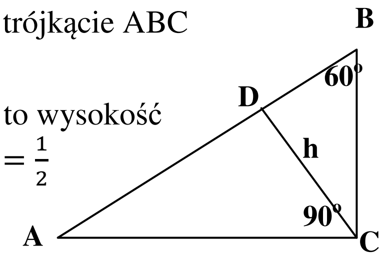
Zad 26.
$2x^2 + x - 6 \geq 0$
$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 \qquad \sqrt{25} = 5$
$x_1 = \frac{-1-5}{2\cdot 2} = \frac{-6}{4} = -1{,}5 \qquad x_2 = \frac{-1+5}{2\cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$
Odp: $x \in (-\infty;\ -1{,}5\rangle \cup \langle 1;\ +\infty)$



Zad 27. $(x^2 - 6)(3x + 2) = 0$
$(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})(3x + 2) = 0$
$x - \sqrt{6} = 0 \quad \vee \quad x + \sqrt{6} \quad \vee \quad 3x + 2 = 0$
$x_1 = \sqrt{6} \qquad x_2 = -\sqrt{6} \qquad 3x = -2 | : 3 \qquad x_3 = -\frac{2}{3}$

Zad 28. :Dla dowolnej liczby dodatniej ma być:
$4x + \frac{1}{x} \geq 4 | \cdot x$
$4x^2 + 1 \geq 4x$ czyli $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$ stosując wzór $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ mamy
$(2x-1)^2 \geq 0$
a to jest nierówność prawdziwa dla każdego ***x*** gdyż kwadrat każdej liczby jest liczbą nieujemną.

Zad 29. Z warunków zadania wynika że $\sphericalangle BAC = 30°$ jako trzeci kąt w trójkącie ABC
$\sin 30° = \frac{1}{2}$ czyli $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$ stąd $BC = \frac{1}{2}AB$
Również $\sphericalangle BCD = 30°$ bo trójkąt BCD jest prostokątny gdyż CD to wysokość
i jest dany kąt $\sphericalangle CBD = 60°$. Korzystając teraz z faktu że $\sin 30° = \frac{1}{2}$
mamy: $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{2}$ stąd $BD = \frac{1}{2}BC$
Czyli $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}AB$ a zatem $AD = \frac{3}{4}AB$
Ostatecznie: $\frac{AD}{BD} = \frac{\frac{3}{4}AB}{\frac{1}{4}AB} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} = \frac{3}{1} = 3:1.$



Zad 30. Mamy zbiór $\{1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 10\}$ Losujemy dwa razy ze zwracaniem więc:
$\bar{\bar{\Omega}} = 5 \cdot 5 = 25$
Aby iloraz pierwszej liczby przez druga był całkowity muszą być wyniki:
$A = \left\{\frac{10}{1} = 10;\ \frac{10}{2} = 5;\ \frac{10}{5} = 2;\ \frac{10}{10} = 1;\ \frac{5}{5} = 1;\ \frac{4}{1} = 4;\ \frac{4}{2} = 2;\ \frac{4}{4} = 1;\ \frac{2}{1} = 2;\ \frac{2}{2} = 1;\ \frac{1}{1} = 1;\right\}$
$\bar{\bar{A}} = 11 \qquad P(A) = \frac{11}{25}$

Zad 31. $a_{21} + a_{24} + a_{27} + a_{30} = 100$. Ciąg arytmetyczny
$a_{25} + a_{26} = a_1 + 24r + a_1 + 25r = 2a_1 + 49r$
Łatwo zauważyć że $a_{21} + a_{30} = a_1 + 20r + a_1 + 29r = 2a_1 + 49r = a_{25} + a_{26}$
tak samo $a_{24} + a_{27} = a_1 + 23r + a_1 + 26r = 2a_1 + 49r = a_{25} + a_{26}$
Tak więc $a_{21} + a_{24} + a_{27} + a_{30} = 4a_1 + 96r = 2(a_{25} + a_{26}) = 100$
Ostatecznie: $a_{25} + a_{26} = 100 : 2 = 50$

Zad 32. $f(x) = ax^2 + bx + c \qquad x_1 = -2 \qquad x_2 = 6 \qquad A = (1;\ -5)$
Korzystając ze wzoru na postać iloczynową funkcji kwadratowej mamy: $f(x) = a(x+2)(x-6)$
Wstawiając teraz do wzoru punkt $A = (1;\ -5)$ mamy:

$-5 = a(1+2)(1-6)$ $\qquad -5 = a \cdot 3 \cdot (-5)$ $\qquad 15a = 5|:15$ $\qquad a = \frac{1}{3}$

$f(x) = \frac{1}{3}(x+2)(x-6)$

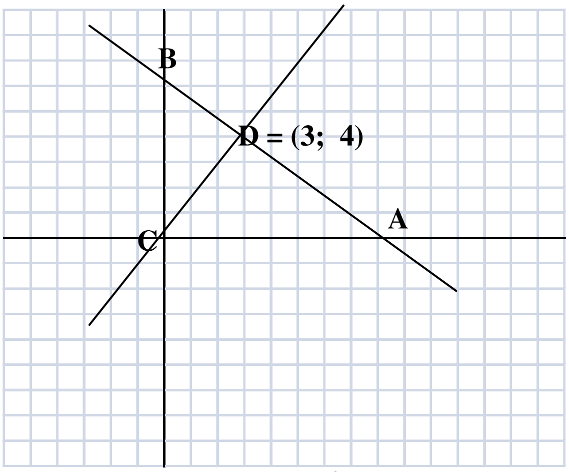
$f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 2x - 12) = \frac{1}{3} \cdot (x^2 - 4x - 12) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 4$

$p = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{4}{3}}{2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2$ pierwsza współrzędna wierzchołka wykresu

$q = f(p) = f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^2 - \frac{4}{3} \cdot 2 - 4 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3} - 4 = -5\frac{1}{3}$

Odpowiedź: Najmniejsza wartość funkcji wynosi $-5\frac{1}{3}$

Zad 33. $C = (0;\ 0)$ $\quad D = (3;\ 4)$ Obliczymy równanie prostej CD $a = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$



Prosta ta ma postać $y = \frac{4}{3}x + b$ ale przechodzi przez punkt $C = (0;\ 0)$ więc $b = 0$

Prosta CD na wzór $y = \frac{4}{3}x$ i jest prostopadła do AB bo jest wysokością więc współczynnik kierunkowy AB $a_2 = -\frac{3}{4}$ $\qquad \left(\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1\right)$

Prosta AB ma postać $y = -\frac{3}{4}x + b$ i przechodzi przez punkt $D = (3;\ 4)$

$4 = -\frac{3}{4} \cdot 3 + b$ $\qquad 4 = -\frac{9}{4} + b$

$b = 4 + \frac{9}{4} = \frac{16}{4} + \frac{9}{4} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$

Prosta AB ma wzór $y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4}$ Tym samym mamy już obliczony punkt przecięcia tej prostej z osią OY gdyż wiemy że to jest punkt $B = (0;\ b) = \left(0;\ \ 6\frac{1}{4}\right)$.

Obliczmy współrzędne punktu A (punkt przecięcia z osią OX)

$0 = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4}$

$\frac{3}{4}x = \frac{25}{4}|\cdot 4$ $\qquad 3x = 25|:3$ $\qquad x = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$ $\qquad A = \left(\frac{25}{3};\ 0\right)$

Długość podstawy czyli długość odcinka AB

$|AB| = \sqrt{\left(\frac{25}{3} - 0\right)^2 + \left(0 - \frac{25}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{625}{9} + \frac{625}{16}} = \sqrt{\frac{10000+5625}{144}} = \sqrt{\frac{15625}{144}} = \frac{125}{12}$

Odpowiedź: Współrzędne punktów $A = \left(\frac{25}{3};\ 0\right)$; $\ B = \left(0;\ \frac{25}{4}\right)$ a długość odcinka AB to $\frac{125}{12}$

Zad 34. Jeżeli $CS = r = 5$ to $AB = 2r = 10$ wiemy to z własności trójkąta prostokątnego na którym jest opisany okrąg.

Teraz z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$(3x)^2 + (4x)^2 = 10^2$ $\qquad 9x^2 + 16x^2 = 100$

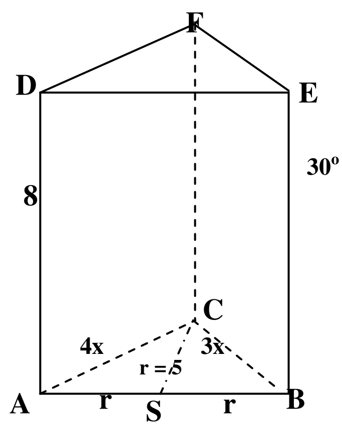
$25x^2 = 100|:25$ $\qquad x^2 = 4$ $\qquad x = \sqrt{4} = 2$

$3x = 2 \cdot 3 = 6$ $\quad 4x = 4 \cdot 2 = 8$

Przyprostokątne trójkąta w podstawie mając długości 6 i 8.

Teraz aby policzyć wysokość graniastosłupa skorzystamy z danego pola ściany BCEF

$P_{BCEF} = 6 \cdot h = 48$ $\qquad h = 48:6 = 8$



$V = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8 = 6 \cdot 8 = 48$

Odpowiedź Objętość graniastosłupa wynosi 48