Czerwiec 2017 rok (poziom rozszerzony)(nowa matura)
Zadania zamknięte

Zad 1. $\left||x-4|-2\right| = 2$

$|x-4|-2=2 \quad \vee \quad |x-4|-2=-2$

$|x-4|=4 \quad \vee \quad |x-4|=0$

$x-4=4 \quad \vee \quad x-4=-4 \quad \vee \quad x-4=0$

teraz już widać że rozwiązań jest 3: $x_1=8 \qquad x_2=0 \qquad x_3=4$ **(D)**

Zad 2. $\log_4 25+\log_2 10=\frac{\log_2 25}{\log_2 4}+\log_2 10=\frac{\log_2 25}{2}+\log_2 10=\frac{1}{2}\cdot\log_2 25+\log_2 10=$

$=\log_2(25)^{\frac{1}{2}}+\log_2 10=\log_2\sqrt{25}+\log_2 10=\log_2 5+\log_2 10=\log_2 5\cdot 10=\log_2 50$ **(B)**

Zad 3. Dane mamy że $P'=(3;\ -3) \quad P=(1;\ 3) \qquad S=(-2;\ 12)$

$k=\frac{SP'}{SP}=\frac{[3-(-2);\ -3-12]}{[1-(-2);\ 3-12]}=\frac{[5;\ -15]}{[3;\ -9]}=\frac{5}{3}$ **(B)**

Zad 4. $f(x)=\frac{x}{2x-8}$ Korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu mamy:

$f'(x)=\frac{1\cdot(2x-8)-x\cdot 2}{(2x-8)^2}=\frac{2x-8-2x}{(2x-8)^2}=\frac{-8}{(2x-8)^2}$

$f'(\sqrt{2}+4)=\frac{-8}{\left[2(\sqrt{2}+4)-8\right]^2}=\frac{-8}{\left(2\sqrt{2}+8-8\right)^2}=\frac{-8}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\frac{-8}{8}=-1$ **(C)**

Zad 5. $S=\frac{a_1}{1-q}$ gdzie $a_1=\frac{1}{3}q \quad \Rightarrow q=3a_1=3a$

$\frac{1}{4}=\frac{a}{1-3a} \quad \Rightarrow \quad 1-3a=4a \quad \Rightarrow \quad -3a-4a=-1 \quad \Rightarrow \quad 7a=1 \qquad a=\frac{1}{7}$ **(B)**

Zadania otwarte

Zad 6. $f(x)=-x^2+bx+c \qquad x_1=-1; \quad x_2=12$ z podanego wzoru mamy $a=-1$

Teraz korzystając z postaci iloczynowej mamy:

$f(x)=-(x+1)(x-12)=-(x^2-12x+x-12)=-x^2+11x+12$

$(p;\ q)$ - współrzędne wierzchołka $p=\frac{-b}{2a}=\frac{-11}{-2}=5{,}5$

$f(p)=f(5{,}5)=-(5{,}5)^2+11\cdot 5{,}5+12=-30{,}25+60{,}5+12=42{,}25$

Odpowiedź: $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{5}$

Zad 7. $5x^2+y^2-4xy+6x+9\geq 0$

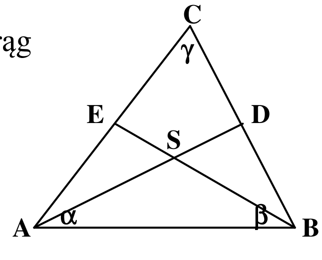
$5x^2+y^2-4xy+6x+9=x^2+6x+9+4x^2-4xy+y^2=(x+3)^2+(2x-y)^2$

Po tym przekształceniu mamy:

$(x+3)^2+(2x-y)^2\geq 0$

To jest nierówność oczywista. Kwadraty pewnych liczb jak też ich suma jest liczbą nieujemną.

Zad 8. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC czyli odcinki AD i BE leżą na dwusiecznych kątów α i β czyli $\sphericalangle CAD=\frac{1}{2}\alpha; \qquad \sphericalangle EBC=\frac{1}{2}\beta$



Mamy wykazać że jeżeli $\alpha+\beta=2\gamma$ to na czworokącie ESDC można opisać okrąg

Jeżeli $\alpha+\beta=2\gamma$ to suma kątów w trójkącie ABC $\alpha+\beta+\gamma=180°$ czyli:

$2\gamma+\gamma=180° \quad \Rightarrow \quad 3\gamma=180° \quad \Rightarrow \quad \gamma=60°$

Z drugiej strony gdy $\alpha+\beta=2\gamma$ to $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$

Z sumy kątów w trójkącie ADC mamy $\sphericalangle ADC=180°-\left(60°+\frac{\beta}{2}\right)=120°-\frac{\beta}{2}$

Z sumy kątów w trójkącie BEC mamy $\sphericalangle BEC=180°-\left(60°+\frac{\alpha}{2}\right)=120°-\frac{\alpha}{2}$

teraz dodając te kąty mamy $120°-\frac{\beta}{2}+120°-\frac{\alpha}{2}=240°-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=240°-\gamma=240°-60°=180°$

Otrzymaliśmy że w czworokącie DCES ma sumę kątów przeciwległych $\sphericalangle SDC+\sphericalangle SEC=180°$ tak więc i $\sphericalangle DCE+\sphericalangle DSE=180°$ czyli na tym czworokącie można opisać okrąg ***co należało wykazać.***

Zad 9. Mamy cyfry $\{0;\ 1;\ 2\}$ a liczba ma być pięciocyfrowa i dzielić się przez 15

Aby liczba dzieliła się przez 15 musi tu spełniać 2 warunki: Podzielność przez 3 i przez 5. $(3\cdot 5=15)$

I) Na końcu musi być 0 bo 1 i 2 na końcu nie da liczby podzielnej przez 5
II) Suma pozostałych 4 cyfr ma dać 3 albo 6 aby dzieliła się przez 3
Ustalamy jakie mogą być kombinacje pozostałych 4 cyfr aby dać sumę podzielną przez 3
$\{1110; \quad 2100; \quad 2220; \quad 2211\}$
Teraz dla każdej grupy cyfr ustalamy ile liczb można z tej grupy utworzyć. Aby liczba była pięciocyfrowa to zero nie może być na początku.
1110 – tu mamy 3 możliwości. Zero na drugim lub trzecim lub czwartym miejscu.
2220 – tu mamy 3 możliwości. Zero na drugim lub trzecim lub czwartym miejscu.
2100 – tu mamy 6 możliwości. Na początku może być 2 to jedynka na drugim lub trzecim lub czwartym miejscu albo na początku jedynka to dwójka drugim lub trzecim lub czwartym miejscu.
2211 – tu mamy 6 możliwości $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$
Razem $3+3+6+6=18$
Odpowiedź: Liczb pięciocyfrowych złożonych z cyfr 1; 2; 0 podzielnych przez 15 jest 18

Zad 10. $\{a_1; \quad a_2; \quad a_3;\}$ - ciąg arytmetyczny $a_1 = q;\ S_8 = \frac{a_1+a_8}{2}\cdot 8 = 124$
$\{b_1; \quad b_2; \quad b_3;\}$ - ciąg geometryczny $b_1 = r;\ b_1 + b_2 = 18$
Z ciągu arytmetycznego mamy $\frac{a_1+a_8}{2}\cdot 8 = 124 \qquad \Rightarrow \qquad 4(a_1+a_8) = 124|:4$
$a_1 + a_8 = 31 \qquad \Rightarrow \qquad a_1 + a_1 + 7r = 31$
$2a_1 + 7r = 31$
Z ciągu geometrycznego mamy: $b_1 + b_2 = 18$ czyli $r + r\cdot q = 18 \qquad r + r\cdot a_1 = 18$
Możemy więc napisać układ równań:
$\begin{cases} 2a_1 + 7r = 31 \\ r + r\cdot a_1 = 18 \end{cases}$ dla uproszczenia niech $a_1 = a$ i korzystając z I równania mamy:
$2a = 31 - 7r|:2 \qquad \Rightarrow \qquad a = 15{,}5 - 3{,}5r$ następnie wstawiając to do II równania mamy:
$r + r(15{,}5 - 3{,}5r) = 18$
$r + 15{,}5r - 3{,}5r^2 = 18|\cdot 2$
$2r + 31r - 7r^2 - 36 = 0$
$-7r^2 + 33r - 36 = 0$
$\Delta = 33^2 - 4\cdot(-7)\cdot(-36) = 1089 - 1008 = 81 \qquad \sqrt{81} = 9$
$r_1 = \frac{-33-9}{2\cdot(-7)} = \frac{-42}{-14} = 3 \qquad r_2 = \frac{-33+9}{2\cdot(-7)} = \frac{-24}{-14} = 1\frac{10}{14};$ r_2 nie spełnia warunków zadania bo ciąg ma być zbiorze liczb całkowitych.
Dla $r_1 = 3$ mamy: $a = 15{,}5 - 3{,}5r = 15{,}5 - 3{,}5\cdot 3 = 15{,}5 - 10{,}5 = 5$
Ciąg arytmetyczny: $a_1 = 5; \quad r = 3$ to $a_n = a_1 + (n-1)r = 5 + (n-1)3 = 2 + 3 + (n-1)3 = 2 + 3n$
Ciąg geometryczny $b_1 = 3; \quad q = 5$ to $b_n = b_1\cdot q^{n-1} = 3\cdot 5^{n-1}$
Odpowiedź: Ciąg arytmetyczny: $a_1 = 5; \quad r = 3; \quad a_n = 3n + 2$
Ciąg geometryczny $b_1 = 3; \quad q = 5; \quad b_n = 3\cdot 5^{n-1}$

Zad 11. $3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \qquad x \in \langle 0; \quad 2\pi\rangle$
Korzystając ze wzorów $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$; $\quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
mamy $3\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right) + \cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\sin\frac{\pi}{4} = 1$
$3\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$
$\frac{3\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 1$
$\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 1$
$\frac{2\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{2\sqrt{2}}{2}\cos x = 1$
$\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 1|:2$
$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{1}{2}$ teraz korzystając z faktu że $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ mamy
$\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{1}{2}$ czyli

$\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

i teraz korzystając w drugą stronę ze wzoru $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ mamy:

$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \vee \qquad x - \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ czyli

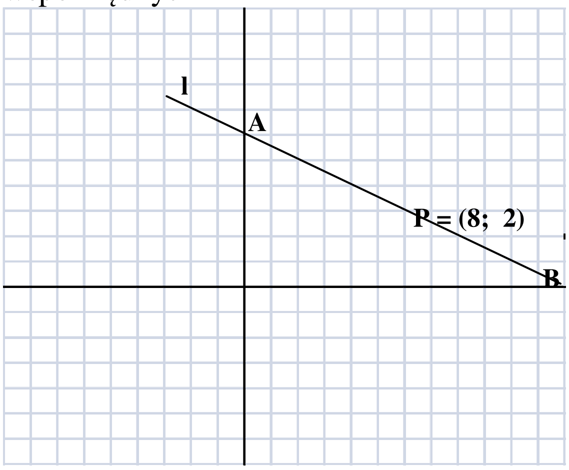
$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \vee \qquad x = \frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ i ostatecznie

$x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \qquad \vee \qquad x = \frac{13}{12}\pi + 2k\pi$

Teraz uwzględniając fakt że $x \in \langle 0; \quad 2\pi \rangle$ mamy odpowiedź:

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są: $x = \frac{5\pi}{12} \qquad \vee \qquad x = \frac{13}{12}\pi$.

Zad 12. $\qquad P = (8; \ \ 2); \quad A = (0; \ \ h) \quad B = (a; \quad 0)$ A i B punkty przecięcia prostej l z osiami współrzędnych



$P = \frac{1}{2}a \cdot h = 36 \qquad a \cdot h = 72 \qquad h = \frac{72}{a}$

Mamy więc na szukanej prostej l trzy punkty: $A = \left(0; \ \ \frac{72}{a}\right); \quad P = (8; \ \ 2); \quad B = (a; \quad 0)$

Możemy teraz na dwa sposoby obliczyć współczynnik kierunkowy prostej $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

I) Korzystamy z punków A i P $a = \frac{2 - \frac{72}{a}}{8 - 0} = \frac{\frac{2a - 72}{a}}{8} = \frac{2a - 72}{8a} = \frac{a - 36}{4a}$

II) Korzystając z punków P i B $a = \frac{0 - 2}{a - 8} = \frac{-2}{a - 8} = \frac{2}{8 - a}$

A że w obu przypadkach chodzi o tą sama prostą więc:

$\frac{a - 36}{4a} = \frac{2}{8 - a}$ czyli $(a - 36)(8 - a) = 4a \cdot 2$

$8a - a^2 - 288 + 36a = 8a$

$-a^2 + 36a + 8a - 8a - 288 = 0$

$-a^2 + 36a - 288 = 0$

$\Delta = 36^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-288) = 1296 - 1152 = 144 \qquad \sqrt{144} = 12$

$a_1 = \frac{-36 - 12}{2 \cdot (-1)} = \frac{-48}{-2} = 24 \qquad a_2 = \frac{-36 + 12}{2 \cdot (-1)} = \frac{-24}{-2} = 12$

$h = \frac{72}{a}$ to dla $a_1 = 24 \quad h_1 = \frac{72}{24} = 3$ a dla $a_2 = 12 \quad h_2 = \frac{72}{12} = 6$

Mamy więc obliczone współrzędne punków leżących na prostej l, są dwa rozwiązania:

I) $A = (0; \ \ 3); \quad P = (8; \ \ 2); \quad B = (24; \quad 0)$

II) $A = (0; \ \ 6); \quad P = (8; \ \ 2); \quad B = (12; \quad 0)$

Teraz dla każdego przypadku można podać równanie prostej l.

Mamy już policzony współczynnik kierunkowy: $a = \frac{2}{8 - a}$

I) $a = \frac{2}{8 - a} = \frac{2}{8 - 24} = \frac{2}{-16} = -\frac{1}{8}$ Prosta ma równanie $y = -\frac{1}{8}x + 3$

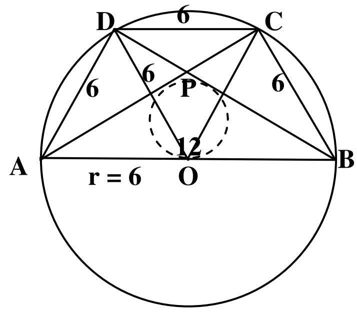
II) $a = \frac{2}{8 - a} = \frac{2}{8 - 12} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$ Prosta ma równanie $y = -\frac{1}{2}x + 6$

Odpowiedź: Prosta l ma równanie $y = -\frac{1}{8}x + 3$ lub $y = -\frac{1}{2}x + 6$

Zad 13. $\qquad x^2 - 3mx + 2m^2 + 1 = 0 \qquad x_1; x_2 \in (-\infty; \ \ 3)$

I) Aby istniały 2 pierwiastki musi być $\Delta > 0$

$\Delta = (-3m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m^2 + 1) = 9m^2 - 8m^2 - 4 = m^2 - 4$
$m^2 - 4 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad (m-2)(m+2) > 0$
$m_1 = 2 \qquad m_2 = -2$
$m \in (-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$
II) Teraz robimy warunek aby oba pierwiastki były mniejsze od 3. Można to zrobić na kilka sposobów.
Np. warunek na prawy pierwiastek: $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} < 3$ czyli $\frac{3m+\sqrt{m^2-4}}{2} < 3 | \cdot 2 \qquad 3m + \sqrt{m^2-4} < 6$ czyli
$\sqrt{m^2-4} < 6 - 3m$
(Równanie to trzeba podnieść do kwadratu. Musimy jednak założyć że prawa strona nierówności jest dodatnia, bo w przeciwnym wypadku nierówność nie miała by sensu a po podniesieniu do kwadratu mogłaby stać się prawdziwa.)
Mamy więc $6 - 3m > 0 \qquad \Rightarrow \qquad -3m > -6 | : (-3) \qquad \Rightarrow \qquad m < 2$
Po podniesieniu $\sqrt{m^2-4} < 6 - 3m$ do kwadratu mamy:
$m^2 - 4 < (6-3m)^2$
$m^2 - 4 < 36 - 36m + 9m^2$
$m^2 - 9m^2 + 36m - 4 - 36 < 0 | \cdot (-1)$
$8m^2 - 36m + 40 > 0 | : 4$
$2m^2 - 9m + 10 > 0$
$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = 81 - 80 = 1 \qquad \sqrt{1} = 1$
$m_1 = \frac{9-1}{2\cdot 2} = \frac{8}{4} = 2 \qquad m_2 = \frac{9+1}{2\cdot 2} = \frac{10}{4} = 2{,}5$
$m \in (-\infty;\ 2) \cup (2{,}5;\ +\infty)$
Teraz mając 3 warunki: $m \in (-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$ i $m < 2$ i $m \in (-\infty;\ 2) \cup (2{,}5;\ +\infty)$ bierzemy cześć wspólną tych warunków i otrzymujemy odpowiedź: $m \in (-\infty;\ -2)$
Odpowiedź: równanie $x^2 - 3mx + 2m^2 + 1 = 0$ ma dwa pierwiastki należące do przedziału $(-\infty;\ 3)$ dla $m \in (-\infty;\ -2)$

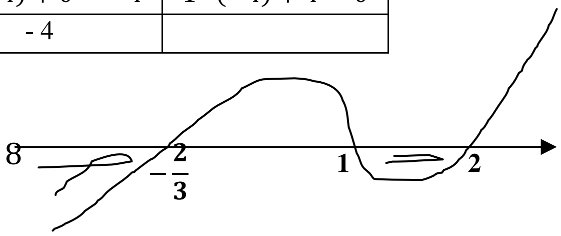


Zad 14. Zgodnie z danymi zadania $AO = OD = OC = BO = r = 6$ także $AD = BC = 6$. Tak więc cały trapez składa się z trzech trójkątów równobocznych o boku 6. AC i BD są odcinkami składającymi się z dwóch wysokości w trójkątach równobocznych, co daje że np.: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAC = 30°$.
Trójkąty ABP i CDP są podobne gdyż maja kąty o tych samych miarach $30°;\ 30°;\ 120°$ Skala podobieństwa tych trójkątów wynosi 2 gdyż $\frac{AB}{CD} = \frac{12}{6} = 2$
Policzmy wysokość poprowadzoną z punktu P w trójkącie ABP
Wysokość trapezu jako wysokość trójkąta równobocznego wynosi $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$
$h_1 = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ Możemy więc policzyć pole trójkąta ABP
$P_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$
Teraz aby policzyć promień okręgu wpisanego trzeba policzyć długości boków trójkąta ABP
$AP = BP = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \cdot 2h = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
$P_{ABP} = p \cdot r$ gdzie p – połowa obwodu trójkąta $p = \frac{1}{2}\left(12 + 2 \cdot 4\sqrt{3}\right) = 6 + 4\sqrt{3}$
$12\sqrt{3} = \left(6 + 4\sqrt{3}\right)r \qquad r = \frac{12\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{2(3+2\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}(3-2\sqrt{3})}{(3+2\sqrt{3})(3-2\sqrt{3})} = \frac{18\sqrt{3}-36}{9-12} = \frac{36-18\sqrt{3}}{3} = 12 - 6\sqrt{3}$
$P_k = \pi r^2 = \pi\left(12 - 6\sqrt{3}\right)^2 = \pi\left(144 - 2 \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} + 36 \cdot 3\right) = \pi\left(144 + 108 - 144\sqrt{3}\right) = \pi\left(252 - 144\sqrt{3}\right)$
Odpowiedź: Pole koła wpisanego w trójkąt ABP wynosi $\pi\left(252 - 144\sqrt{3}\right)$.

Zad 15. Zgodnie z założeniem zadania krawędzie prostopadłościanu oznaczymy: $x;\quad 2x;\quad y$
$V = a \cdot b \cdot c = x \cdot 2x \cdot y = 2x^2y = 8$ czyli $x^2y = 4 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{4}{x^2}$
mamy też dodatkowe założenie co do długości krawędzi:
$4x + 4 \cdot 2x + 4 \cdot y < 28 \qquad \Rightarrow \qquad 4x + 8x + 4y < 28 \qquad \Rightarrow \qquad 12x + 4y < 28 | : 4$
$3x + y < 7 \qquad \Rightarrow \qquad 3x + \frac{4}{x^2} < 7 \qquad \Rightarrow \qquad 3x + \frac{4}{x^2} - 7 < 0 | \cdot x^2$
$3x^3 + 4 - 7x^2 < 0$
$3x^3 - 7x^2 + 4 < 0$

Widać wyraźnie że pierwiastkiem wielomianu $3x^3 - 7x^2 + 4$ jest $x_1 = 1$ $(3 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 4 = 0)$
Wykonamy teraz dzielenie $(3x^3 - 7x^2 + 4):(x - 1)$ metodą Herona.

	3	- 7	0	4
obliczenia		$3 \cdot 1 - 7 = -4$	$1 \cdot (-4) + 0 = -4$	$1 \cdot (-4) + 4 = 0$
pierwiastek 1	3	- 4	- 4	



Wynik $3x^2 - 4x - 4$ Szukamy dalszych pierwiastków
$3x^2 - 4x - 4 = 0$
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 16 + 48 = 64$ $\quad \sqrt{64} = 8$
$x_2 = \frac{4-8}{2 \cdot 3} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$ $\quad x_3 = \frac{4+8}{2 \cdot 3} = \frac{12}{6} = 2$
$x \in \left(-\infty; \ \frac{2}{3}\right) \cup (1; \ 2)$
Z uwagi na to że chodzi w tym zadaniu o długość krawędzi
więc pod uwagę bierzemy przedział $x \in (1; \ 2)$
Przedział ten będzie też dziedziną funkcji opisującej pole powierzchni prostopadłościanu.
Teraz napiszmy wzór na pole powierzchni:
$P_{pc} = 2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 2x \cdot y = 4x^2 + 2x \cdot \frac{4}{x^2} + 4x \cdot \frac{4}{x^2} = 4x^2 + \frac{8x}{x^2} + \frac{16x}{x^2} = 4x^2 + \frac{24x}{x^2} = 4x^2 + \frac{24}{x}$
$P(x) = 4x^2 + \frac{24}{x}$ Pole powierzchni jako funkcja zmiennej $\boldsymbol{x}$ (jedna z krawędzi)
Dziedzina: $x > 0$ jako długość odcinka oraz biorąc warunek z sumy długości krawędzi to:
$D = (1; \ 2)$
$P'(x) = 8x + \frac{-24 \cdot 1}{x^2} = 8x - \frac{24}{x^2}$
Sprawdzamy gdzie funkcja może mieć ekstremum czyli $8x - \frac{24}{x^2} = 0$
$\frac{8x^3 - 24}{x^2} = 0 \qquad x \neq 0$
$8x^3 - 24 = 0 | : 8 \qquad \Rightarrow \qquad x^3 - 3 = 0.$
$x = \sqrt[3]{3}$ łatwo stwierdzić że jest to minimum bo dla $x \in \left(1; \ \sqrt[3]{3}\right)$ $8x^3 < 24$
natomiast dla $x \in \left(\sqrt[3]{3}; \ 2\right)$ $8x^3 > 24$
Mamy więc krawędzie prostopadłościanu, którego pole powierzchni będzie najmniejsze:
$x = \sqrt[3]{3}; \quad 2x = 2\sqrt[3]{3}; \quad y = \frac{4}{x^2} = \frac{4}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt[3]{9}} = \frac{4\sqrt[3]{3}}{3} \qquad \left\{\sqrt[3]{3}; \quad 2\sqrt[3]{3}; \quad \frac{4\sqrt[3]{3}}{3}\right\}$
Nie na tego w poleceniu zadania ale to pole powierzchni będzie wynosić:
$P_{pc} = 2 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot 2\sqrt[3]{3} + 2 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \frac{4\sqrt[3]{3}}{3} + 2 \cdot 2\sqrt[3]{3} \cdot \frac{4\sqrt[3]{3}}{3} = 4\sqrt[3]{9} + \frac{8\sqrt[3]{9}}{3} + \frac{16\sqrt[3]{9}}{3} = 4\sqrt[3]{9} + \frac{24\sqrt[3]{9}}{3} = 4\sqrt[3]{9} + 8\sqrt[3]{9} = 12\sqrt[3]{9}$