Matura II termin czerwiec 2017r

Zadania zamknięte

Zad 1. $|9-2|-|4-7|=|7|-|-3|=7-3=4$ **(A)**

Zad 2. $a\cdot b=1350 \qquad 0{,}15a=0{,}1b|\cdot 10$

$1{,}5a=b \quad \Rightarrow \quad a\cdot 1{,}5a=1350 \quad \Rightarrow \quad 1{,}5a^2=1350|:1{,}5$

$a^2=900 \quad \Rightarrow \quad a=\sqrt{900}=30 \quad \Rightarrow \quad b=1{,}5\cdot 30=45$ **(C)**

Zad 3. $16^{24}+16^{24}+16^{24}+16^{24}=4\cdot 16^{24}=4\cdot(4^2)^{24}=4\cdot 4^{48}=4^{49}$ **(D)**

Zad 4. $\log_3 27-\log_3 1=3-0=3$ **(D)**

Zad 5. $x^6-2x^3-3=(x^3-3)(x^3+1)$ **(B)**

Zad 6. $a=2\sqrt{3} \qquad b=\sqrt{75}=\sqrt{25\cdot 3}=5\sqrt{3}$

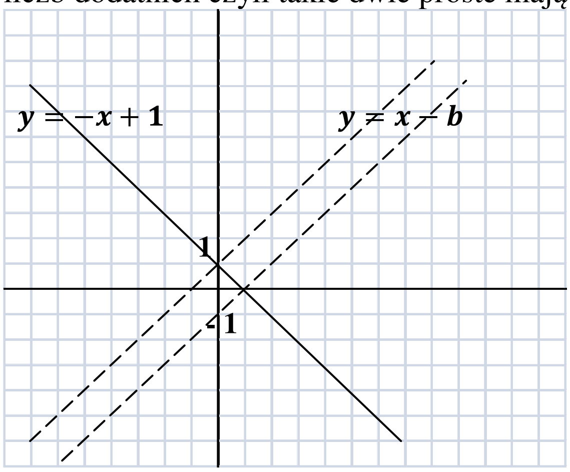
$(b-a)^2=\left(5\sqrt{3}-2\sqrt{3}\right)^2=\left(3\sqrt{3}\right)^2=9\cdot 3=27$ **(B)**

Zad 7. $f(x)=21-\frac{7}{3}x$ miejsce zerowe to $21-\frac{7}{3}x=0$

$-\frac{7}{3}x=-21|\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)$

$x=\frac{21\cdot 3}{7}=9$ **(C)**

Zad 8. $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=b \end{cases}$ czyli ten układ reprezentują takie dwie proste: $\begin{cases} y=-x+1 \\ y=x-b \end{cases}$ Rozwiązaniem ma być para liczb dodatnich czyli takie dwie proste mają się przecinać w I ćwiartce.



b to punkt przecięcia z osią OY więc widać że aby proste przecinały się w I ćwiartce to $-1<b<1$ **(C)**

Zad 9. $f(x)=x^2+bx+c \quad f(-1)=f(3)=1$. Wiemy że wykres funkcji kwadratowej jest symetryczny względem prostej $x=p$ tak więc $p=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$. Skąd inąd wiadomo że $p=-\frac{b}{2a}$. Tak więc

$1=-\frac{b}{2} \qquad b=-2$ **(A)**

Zad 10. $x(x-3)(x^2+25)=0$

$x=0 \quad \vee \quad x-3=0 \quad \vee \quad x^2+25=0$ - sprzeczność

$x_1=0 \qquad x_2=3 \qquad x^2+25\neq 0$ **(C)**

Zad 11. $f(x)=(x-3)(7-x)$

$f(x)=7x-x^2-21+3x$

$f(x)=-x^2+10x-21$ Aby odpowiedzieć na pytanie trzeba obliczyć $q=\frac{-\Delta}{4a}$

$\Delta=10^2-4\cdot(-1)\cdot(-21)=100-84=16$

$q=\frac{-16}{4\cdot(-1)}=4$ **(D)**

Zad 12. $A=(2017;\quad 0)=(x;\quad y)$ Należy się rozejrzeć za odpowiedzią gdzie podstawiając za x = 2017 wyjdzie zero.

$f(x)=(x+2017)(x-2017)=(2017+2017)(2017-2017)=4034\cdot 0=0$ **(C)**

Zad 13. $2a_3=a_2+a_1+1$

$2(a_1+2r)=a_1+r+a_1+1$

$2a_1+4r=2a_1+r+1 \quad \Rightarrow \quad 2a_1-2a_1+4r-r=1$

$3r=1 \quad \Rightarrow \quad r=\frac{1}{3}$ **(B)**

Zad 14. $(x;\quad 2x^2;\quad 4x^3;\quad 8)$ ciąg geometryczny

$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2x^2}{x}=2x$ tak samo $q=\frac{a_3}{a_2}=\frac{4x^3}{2x^2}=2x$ ale też $a_4=a_1\cdot q^3$ czyli $8=x\cdot(2x)^3$

$8=x\cdot 8x^3 \quad\Longrightarrow\quad 8=8x^4|:8 \quad\Longrightarrow\quad x^4=1 \quad\Longrightarrow\quad x=1$ **(B)**

Zad 15. $\tan\alpha=\frac{12}{5}$ α – kąt ostry

Zadanie można rozwiązać na dwa sposoby

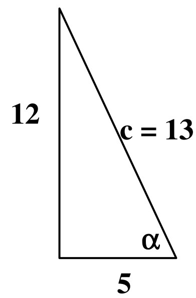
I. Porządnie czyli rozwiązać układ równań: $\begin{cases}\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{12}{5}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$

II. Narysować trójkąt prostokątny zgodnie z danymi,
z Twierdzenia Pitagorasa wyliczyć c = 13

$12^2+5^2=c^2 \qquad c^2=144+25=169$

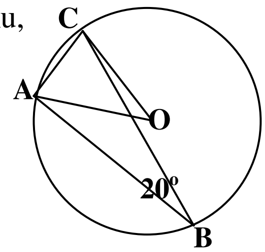
$c=\sqrt{169}=13$

$\sin\alpha=\frac{12}{13}$



(D)

Zad 16. $\sphericalangle ABC$ wpisany a $\sphericalangle AOC$ środkowy oparty na tym samym łuku,
więc $\sphericalangle AOC=2\cdot 20°=40°$
Trójkąt AOC równoramienny
$\sphericalangle CAO=(180°-40°):2=140°:2=70°$



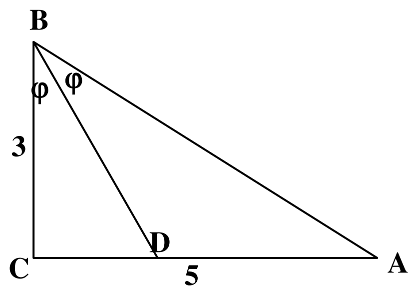
(B)

Zad 17.

$\tan\sphericalangle ABC=\frac{5}{3}\approx 1{,}667$

$\sphericalangle ABC\approx 59°$ odczytane z tablic

$\varphi=\frac{1}{2}\cdot 59°=29{,}5°$



(B)

Zad 18. $A=(-10;\quad 5)$ i jeżeli prosta przechodzi przez $(0;\quad 0)$ to jej współczynnik kierunkowy

$a=\frac{y}{x}=\frac{5}{-10}=-\frac{1}{2}=-0{,}5$

Tak więc prosta prostopadła ma współczynnik kierunkowy $a=2 \qquad \left(-\frac{1}{2}\cdot 2=-1\right)$ **(D)**

Zad 19. $A=(-21;\ 11) \qquad B=(3;\quad 17)$ to środek $S=\left(\frac{-21+3}{2};\quad \frac{11+17}{2}\right)=(-9;\quad 14)$

$S'=(-9;\ -14)$ jako symetryczny względem OX **(A)**

Zad 20. Zgodnie z warunkami zadania trójkąt ABC jest podobny do A'B'C' w skali $k=\frac{5}{2}$. Stosunek pól figur podobnych to $k^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$ **(D)**

Zad 21. Wiemy że promień koła opisanego na trójkącie równobocznym to $r=\frac{2}{3}h=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ gdzie ***a*** to bok trójkąta.

$P_k=\pi r^2=\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{3\pi a^2}{9}=\frac{\pi a^2}{3}$ tak więc $\frac{\pi a^2}{3}=\frac{1}{3}\pi^3|\cdot 3$

$\pi a^2=\pi^3|:\pi \quad\Longrightarrow\quad a^2=\pi^2 \quad\Longrightarrow\quad a=\pi$ **(B)**

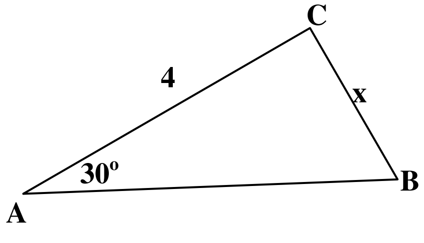
Zad 22.

$\tan 30°=\frac{x}{4} \qquad \tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{x}{4} \qquad 3x=4\sqrt{3}|:3$

$x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$P=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$



(C)

Zad 23. $d = 6$ - przekątna sześcianu. Wiemy że $d = a\sqrt{3}$ czyli $a\sqrt{3} = 6$

$a = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

$P_{pc} = 6a^2 = 6 \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$ **(A)**

Zad 24. $P_b = 2\pi rh$ $\quad 16\pi = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot h$ $\quad 16\pi = 4\pi h|:4\pi$ $\quad h = 4$ **(A)**

Zad 25. $\overline{\overline{\Omega}} = 6 \cdot 6 = 36$

$A = \{(6;4);(6;5);(6;6);(5;5);(5;6);(4;6)\}$ $\quad \overline{\overline{A}} = 6$

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ **(A)**

Zadania otwarte

Zad 26. $\left(x - \frac{1}{2}\right)x > 3\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

$x^2 - \frac{1}{2}x > 3\left(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\right)$

$x^2 - \frac{1}{2}x > 3x^2 + x - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

$x^2 - 3x^2 - \frac{1}{2}x - x + 1{,}5x + \frac{1}{2} > 0$

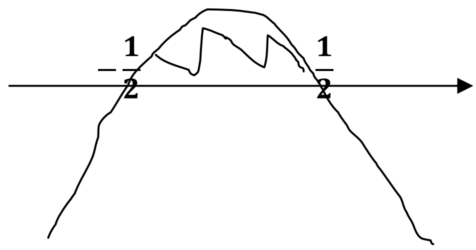
$-2x^2 + \frac{1}{2} > 0|:2$

$-x^2 + \frac{1}{4} > 0$ $\quad \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} + x\right) > 0$

Pierwiastki: $\frac{1}{2} - x = 0$ $\quad \vee \quad$ $\frac{1}{2} + x = 0$

$x_1 = \frac{1}{2}$ $\quad x_2 = -\frac{1}{2}$

Odp: $x \in \left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$



Zad 27. $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$

$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha$

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$

Ale mamy dane że: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$

Stąd $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{7}{4}$ czyli $2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}$

Mamy więc $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 - \frac{3}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$

Zad 28. Dane jest że BD dwusieczna kąta oraz |AD| = |BD|
tak więc trójkąt ADB równoramienny więc:

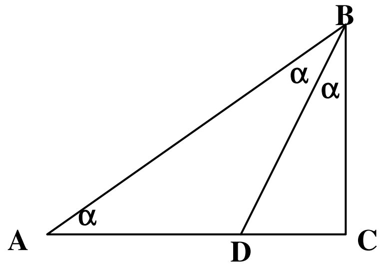
$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$

Mamy więc zgodnie z oznaczeniami na rysunku:

$\alpha + \alpha + \alpha = 90°|:3$ $\quad \alpha = 30°$

$\sin\alpha = \frac{CD}{BD}$ $\quad \sin 30° = \frac{1}{2}$

$\frac{CD}{BD} = \frac{1}{2}$ $\quad \Rightarrow \quad CD = \frac{1}{2}BD$



Zad 29. $(1{,}5)^{100} < 6^{25}$

$(1{,}5)^{100} = \left(\frac{3}{2}\right)^{100} = \frac{3^{100}}{2^{100}}$

$6^{25} = (3 \cdot 2)^{25} = 3^{25} \cdot 2^{25}$ Czyli mamy udowodnić:

$\frac{3^{100}}{2^{100}} < 3^{25} \cdot 2^{25}$ po pomnożeniu nierówności przez 2^{100} mamy

$3^{100} < 3^{25} \cdot 2^{25} \cdot 2^{100}$ możemy to podzielić przez 3^{25} i otrzymujemy:

$3^{75} < 2^{125}$ teraz trzeba zauważyć że: $3^{75} = (3^3)^{25} = 27^{25}$ oraz $2^{125} = (2^5)^{25} = 32^{25}$

Doszliśmy więc do nierówności $27^{25} < 32^{25}$ która jest oczywista.

Zad 30. Ciąg arytmetyczny $S_{30} = 30$ oraz $a_{30} = 30$ czyli dla $n = 30$ mamy:

$S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30$

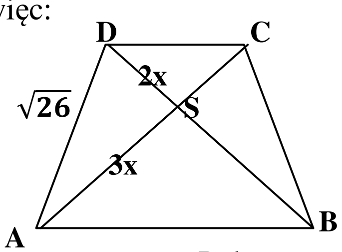
$30 = \frac{a_1 + 30}{2} \cdot 30$ $\quad \Rightarrow \quad 30 = (a_1 + 30) \cdot 15$

$30 = 15a_1 + 450$ $\quad \Rightarrow \quad -15a_1 = 450 - 30$ $\quad \Rightarrow \quad -15a_1 = 420|:(-15)$

$a_1 = -28 \quad a_{30} = a_1 + 29r$
$30 = -28 + 29r \qquad 29r = 30 + 28 \qquad 29r = 58|:29 \qquad r = 2$

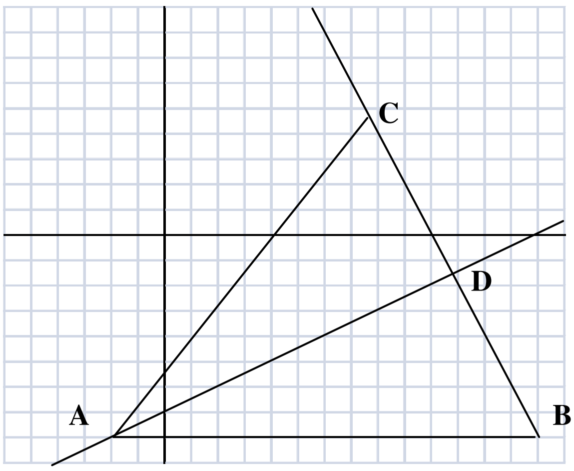
Zad 31. W podanym zbiorze jest 7 liczb parzystych i 8 nieparzystych. Aby iloczyn był parzysty to przynajmniej jedna z wylosowanych musi być parzysta.
Wszystkich możliwych iloczynów jest $15 \cdot 14 = 210$. Obliczymy ile jest iloczynów nieparzystych. Aby iloczyn był nieparzysty to obie liczby musza być nieparzyste. Aby pierwsza była nieparzysta mamy 8 możliwości. Gdy już pierwsza jest nieparzysta to aby druga też była nieparzysta jest 7 możliwości (losujemy bez zwracania) $8 \cdot 7 = 56$ i ostatecznie mamy: $210 - 56 = 154$
Odpowiedź: Wszystkich możliwych par aby iloczyn był parzysty jest 154.

Zad 32. Z założenia zadania trójkąt ASD jest prostokątny więc:



$(2x)^2 + (3x)^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2$
$4x^2 + 9x^2 = 26 \qquad 13x^2 = 26|:13$
$x^2 = 2 \qquad x = \sqrt{2}$
$DS = CS = 2x = 2\sqrt{2}$
$AS = BS = 3x = 3\sqrt{2}$
Korzystając z faktu że przekątne przecinają się pod kątem prostym, Pole trapezu łatwo policzyć jako pole trójkątów o podstawie BD i wysokościach SA i SC
$P = \frac{1}{2}5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} + \frac{1}{2}5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}5\sqrt{2} \cdot \left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(5\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 2 = 25$

Zad 33. $A = (-2;\ -8) \quad B = (14;\ -8)$ |AB| = |AC| wysokość leży na $y = \frac{1}{2}x - 7 \quad C = (x;\ y)$



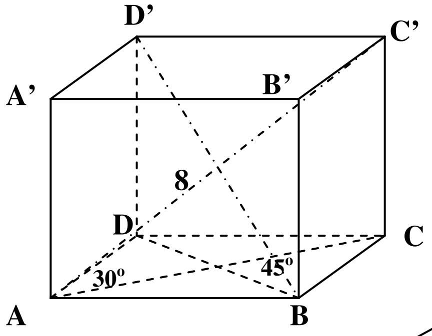
Wysokość AD jest prostopadłą do podstawy BC. Tak więc prosta na której leży podstawa BC jest prostopadła do $y = \frac{1}{2}x - 7$ i przechodzi przez $B = (14;\ -8)$. Prosta prostopadła do $y = \frac{1}{2}x - 7$ ma współczynnik kierunkowy $a = -2 \qquad \left(-2 \cdot \frac{1}{2} = -1\right)$. Tak więc szukana prosta BC ma postać $y = -2x + b$ i przechodzi przez $B = (14;\ -8)$
$-8 = -2 \cdot 14 + b \qquad -8 = -28 + b \qquad b = 20$
$y = -2x + 20$ - równanie prostej BC
Teraz rozwiązując układ równań $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 7 \\ y = -2x + 20 \end{cases}$ obliczymy współrzędne punktu D (środek podstawy BC)
$\frac{1}{2}x - 7 = -2x + 20$
$\frac{1}{2}x + 2x = 20 + 7$
$2\frac{1}{2}x = 27|:\frac{5}{2} \qquad x = 27 \cdot \frac{2}{5} = \frac{54}{5} = 10\frac{4}{5}$
$y = -2x + 20 = -2 \cdot 10\frac{4}{5} + 20 = -20\frac{8}{5} + 20 = -\frac{8}{5} \qquad D = \left(10\frac{4}{5};\ -\frac{8}{5}\right)$
Teraz korzystając ze wzoru na środek odcinka mamy
$\frac{14+x}{2} = 10\frac{4}{5}| \cdot 2 \qquad \frac{-8+y}{2} = -\frac{8}{5}| \cdot 2$
$14 + x = 20\frac{8}{5} \qquad -8 + y = -\frac{16}{5}$

$x = 20\frac{8}{5} - 14$ $\qquad$ $y = 8 - \frac{16}{5}$

$x = 6\frac{8}{5} = 7\frac{3}{5}$ $\qquad$ $y = 8 - 3\frac{1}{5} = 4\frac{4}{5}$

Odpowiedź: Współrzędne punktu $C = \left(7\frac{3}{5}; \quad 4\frac{4}{5}\right)$

Zad 34. Korzystając z przekroju graniastosłupa ACC' mamy:



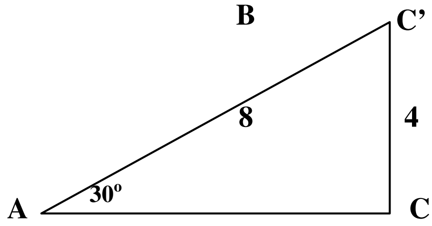
$\sin 30° = \frac{CC'}{8}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} = \frac{CC'}{8}$ $\qquad$ $CC' = 4$

$\cos 30° = \frac{AC}{8}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{8}$

$2AC = 8\sqrt{3}$ $\qquad$ $AC = 4\sqrt{3}$ - I przekątna podstawy

Teraz korzystając z drugiego przekroju BDD'
i faktu że wysokość graniastosłupa wynosi 4
|CC'| =|DD'| mamy:

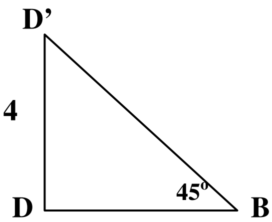
$\tan 45° = \frac{4}{BD}$ $\qquad$ $1 = \frac{4}{BD}$ $\qquad$ $BD = 4$



Mamy policzone długości przekątnych rombu:
$AC = 4\sqrt{3}$ oraz $BD = 4$

Teraz policzymy bok rombu korzystając z faktu, że przekątne przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy:

$x^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2$ $\qquad$ $x^2 = 4 \cdot 3 + 4 = 12 + 4 = 16$



$x = \sqrt{16} = 4$ - bok rombu czyli krawędź podstawy.

Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa to:
dwie podstawy (romby) i cztery ściany (kwadraty o boku 4)

$P_{pc} = 2 \cdot \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{2} + 4 \cdot 4^2 = 16\sqrt{3} + 4 \cdot 16 = 16\left(\sqrt{3} + 4\right)$

lub $P_{pc} = 16\sqrt{3} + 64$