Maj 2017r - poziom rozszerzony

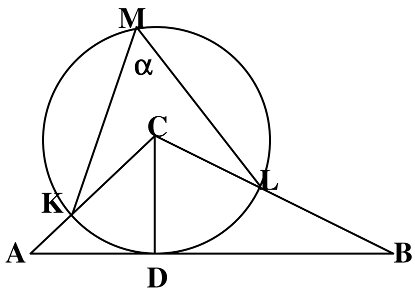
Zadania zamknięte

Zad 1. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 = 2-\sqrt{3}-2\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}+2+\sqrt{3} = 4-2\sqrt{4-3} = 4-2\sqrt{1} = 4-2 = 2$ **(A)**

Zad 2. $a_n = \frac{(n^2-10n)(2-3n)}{2n^3+n^2+3}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-10n)(2-3n)}{2n^3+n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n^3-10n+30n^2}{2n^3+n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{-3n^3+32n^2-10n}{2n^3+n^2+3} =$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-3n^3}{n^3}^{\nearrow -3}+\frac{32n^2}{n^3}^{\nearrow 0}-\frac{10n}{n^3}^{\nearrow 0}}{\frac{2n^3}{n^3}^{\nearrow 2}+\frac{n^2}{n^3}^{\nearrow 0}+\frac{3}{n^3}^{\nearrow 0}} = -\frac{3}{2}$ **(D)**

Zad 3.



Mamy trójkąty prostokątne ADC i BDC. Jeżeli AD = DC to $\sphericalangle ACD = 45°$ Jeżeli $|BC| = 2\cdot|CD|$ to $\sphericalangle BCD = 60°$ (Fakty znane uczniowi gimnazjum lub kl VIII) Tak więc kąt środkowy $\sphericalangle KCL = 45° + 60° = 105°$ stąd kąt wpisany $\sphericalangle KML = \frac{1}{2}\cdot 105° = 52{,}5°$ **(C)**

Zad 4. $B = (-4;\ \ 7)$ $\vec{u} = [-3;\ \ 5]$ $\overrightarrow{AB} = -3\vec{u}$ $A = (x;\ \ y)$ $\overrightarrow{AB} = [-4-x;\ \ 7-y]$

$-4-x = -3\cdot(-3)$ $\qquad 7-y = -3\cdot 5$

$-x = 9+4$ $\qquad -y = -15-7$

$-x = 13$ $\qquad -y = -22$

$x = -13$ $\qquad y = 22$ $\qquad A = (-13;\ \ 22)$ **(B)**

Zadania otwarte

Zad 5. $W(x) = x^3-2x^2+ax+\frac{3}{4}$ dzielony przez $x-2$ daje resztę 1.

wykonujemy dzielenie wielomianów:

$$
\begin{array}{l}
\underline{x^2 \qquad\quad + a} \\
\left(x^3-2x^2+ax+\frac{3}{4}\right) \qquad :(x-2) \\
\underline{-x^3+2x^2} \\
\qquad\qquad ax+\frac{3}{4} \\
\qquad\quad \underline{-ax+2a} \\
\qquad\qquad\quad 2a+\frac{3}{4}
\end{array}
$$

reszta z dzielenia $2a+\frac{3}{4} = 1$

$2a = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{1}{8} = 0{,}125$

Odpowiedź w kratki trzeba wpisać 125

Zad 6. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ styczna w punkcie $P = (1;\ \ 0)$

$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-(2x^2-2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

$f'(1) = \frac{-(1)^2+2\cdot 1+1}{(1^2+1)^2} = \frac{-1+3}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = a$ - współczynnik kierunkowy stycznej do krzywej w punkcie $P = (1;\ \ 0)$ Styczna ma postać $y = \frac{1}{2}x+b$ oraz przechodzi przez $P = (1;\ \ 0)$ więc

$0 = \frac{1}{2} \cdot 1 + b$

$b = -\frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ czyli $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ jest równaniem stycznej do podanej krzywej w punkcie $P = (1;\ \ 0)$

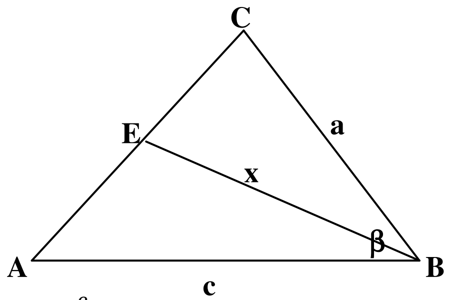
Zad 7. $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ dla $x \neq y$

$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 = 2x^2 - 4xy + 2y^2 + x^2y^2 - 4xy + 4 =$

$2(x^2 - 2xy + 2y^2) + (xy)^2 - 4xy + 4 = \mathbf{2(x-y)^2 + (xy-2)^2}$

z uwagi na to że $x \neq y$ to $x - y \neq 0$ więc $(x-y)^2 > 0$ natomiast $(xy-2)^2 \geq 0$ jako kwadrat liczby więc suma jest > 0

Zad 8.



wykazać $|BE| = x = \frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$

$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ac\sin\beta$ $\frac{1}{2}P_{\Delta BEA} = cx\sin\frac{\beta}{2}$ $\frac{1}{2}P_{\Delta BCE} = ax\sin\frac{\beta}{2}$ oczywiście $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ABE} + P_{\Delta BCE}$

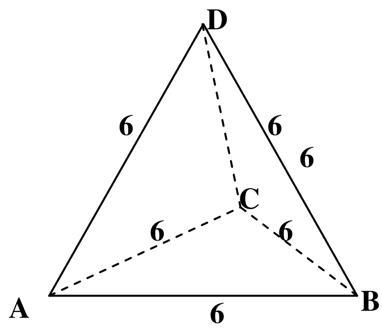
$\frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}cx\sin\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}ax\sin\frac{\beta}{2}$ czyli $ac\sin\beta = cx\sin\frac{\beta}{2} + ax\sin\frac{\beta}{2}$

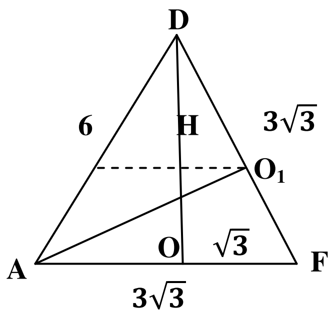
$ac\sin\beta = x\left(c\sin\frac{\beta}{2} + a\sin\frac{\beta}{2}\right)$

$x = \frac{ac\sin\beta}{c\sin\frac{\beta}{2} + a\sin\frac{\beta}{2}}$ korzystając ze wzoru $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$

otrzymamy $x = \frac{ac2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{c\sin\frac{\beta}{2} + a\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{2ac\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}(c+a)} = \frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$

Zad 9.





Ostrosłup odcięty przez płaszczyznę π o objętości $\frac{8}{27}$ objętości całego jest do niego podobny chociażby dlatego że płaszczyzna π jest równoległa do podstawy. Podobieństwo jest w skali k = $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$ czyli płaszczyzna π jest na wysokości $\frac{2}{3}$ od podstawy. Policzmy wysokość ostrosłupa za pomocą Twierdzenia Pitagorasa z trójkąta DFO. Wysokość ściany bocznej jako wysokość trójkąta równobocznego $DF = h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. Odcinek $OF = \frac{1}{3}h = \sqrt{3}$. Tak więc $H^2 + \sqrt{3}^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2$

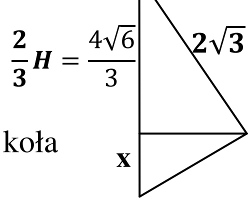
$H^2 + 3 = 9 \cdot 3$

$H^2 = 27 - 3 = 24$

$H = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$

$\frac{2}{3}H = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

x – odległość płaszczyzny π od środka koła



Trójkąty obok są prostokątne i mają jeden kąt wspólny więc są podobne można więc zapisać proporcję $\frac{2\sqrt{3}}{\frac{4\sqrt{6}}{3}} = \frac{\frac{4\sqrt{6}}{3}+x}{2\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \left(2\sqrt{3}\right)^2 = \frac{4\sqrt{6}}{3}\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}+x\right)$

$4 \cdot 3 = \frac{16\cdot 6}{9} + \frac{4\sqrt{6}}{3}x$

$12 = \frac{32}{3} + \frac{4\sqrt{6}}{3}x| \cdot 3$

$36 = 32 + 4\sqrt{6}x$

$4\sqrt{6}x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{4\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

Odpowiedź: Odległość płaszczyzny π od środka koła wpisanego wynosi $\frac{\sqrt{6}}{6}$

Zad 10. $\cos 2x + 3\cos x = -2 \ \ x \in \langle 0; \ \ 2\pi\rangle$

wiedząc że: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$ mamy:

$$2\cos^2 x - 1 + 3\cos x + 2 = 0$$

$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ używamy zmiennej pomocniczej $\cos x = t$

$2t^2 + 3t + 1 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 9 - 8 = 1 \quad \sqrt{1} = 1$

$t_1 = \frac{-3-1}{2\cdot 2} = \frac{-4}{4} = -1 \qquad t_2 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$

$\cos x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pi + 2k\pi$

$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{6}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$

Odp: dla $x \in \langle 0; \ \ 2\pi\rangle$ mamy: $x = \frac{2}{3}\pi \quad \vee \quad x = \pi \quad \vee \quad x = \frac{4}{3}\pi$

Zad 11. Aby wylosować jedną piłeczkę z ośmiu to mamy na to 8 sposobów tak więc

$\overline{\overline{\Omega}} = 8\cdot 8\cdot 8 = 512$

A – iloczyn trzech losowań podzielny przez 4. Taki wynik można uzyskać w trzech przypadkach

I. każda wylosowana liczba jest parzysta (W zbiorze jest ich 4: $\{2; \ 4; \ 6; \ 8\}$) – to się może zdarzyć w $4\cdot 4\cdot 4 = 64$ przypadkach

II. Jedna jest nieparzysta a dwie liczby parzyste $4\cdot 4\cdot 4\cdot 3 = 192$ przypadki. Liczba nieparzysta może być jako pierwsza lub druga lub trzecia

III. Dwie nieparzyste i jedna podzielna przez 4 czyli $\{4; \ 8\}$

$4\cdot 4\cdot 2\cdot 3 = 96$ Ta podzielna przez 4 może być w trzech różnych miejscach analogicznie jak wyżej.

$\overline{\overline{A}} = 64 + 192 + 96 = 352 \qquad P(A) = \frac{352}{512} = \frac{176}{256} = \frac{88}{128} = \frac{44}{64} = \frac{22}{32} = \frac{11}{16}$

Zad 12. $4x^2 - 6mx + (2m+3)(m-3) = 0 \quad x_1 < x_2$ oraz $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$

1) Aby pierwiastki istniały i były różne: $\Delta > 0 \ czyli \ (-6m)^2 - 4\cdot 4(2m+3)(m-3) > 0$

$36m^2 - 16(2m^2 - 6m + 3m - 9) > 0$

$36m^2 - 32m^2 + 48m + 144 > 0$

$4m^2 + 48m + 144 > 0|:4$

$m^2 + 12m + 36 > 0$

$\Delta_1 = 12^2 - 4\cdot 36 = 144 - 144 = 0 \ \ m_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2} = -6$ Pierwiastki $x_1 \ i \ x_2$ istnieją dla wszystkich x z wyjątkiem $m = -6$ czyli $m \in (-\infty; \ -6) \cup (-6; \ +\infty)$

2) $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$ jeżeli potraktujemy $a = 4x_1 - 4x_2 \quad b = 1$ i zastosujemy III wzór skróconego mnożenia to mamy:

$(4x_1 - 4x_2)^2 - 1^2 < 0$

$16{x_1}^2 - 32x_1x_1 + 16{x_2}^2 - 1 < 0$

$16({x_1}^2 - 2x_1x_2 + {x_2}^2) < 1$

$16({x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_2}^2 - 4x_1x_2) < 1$

$16[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] < 1$

Korzystając ze wzorów Viete'a $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{6m}{4}$

oraz $x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{(2m+3)(m-3)}{4}$ otrzymamy:

$16\left(\left(\frac{6m}{4}\right)^2 - \frac{4(2m+3)(m-3)}{4}\right) < 1$

$16\left[\frac{36m^2}{16} - (2m^2 - 6m + 3m - 9)\right] < 1$

$16\left(\frac{36m^2}{16} - 2m^2 + 3m + 9\right) < 1$

$36m^2 - 32m^2 + 48m + 144 < 1$

$4m^2 + 48m + 143 < 0$

$\Delta_1 = 48^2 - 4 \cdot 4 \cdot 143 = 2304 - 2288 = 16 \qquad \sqrt{16} = 4$

$m_1 = \frac{-48-4}{8} = \frac{-52}{8} = -6{,}5 \qquad m_2 = \frac{-48+4}{8} = \frac{-44}{8} = -5{,}5 \;\; m \in (-6{,}5;\; -5{,}5)$

Rozwiązanie to część wspólna zbiorów $m \in (-\infty;\; -6) \cup (-6;\; +\infty)$ i $m \in (-6{,}5;\; -5{,}5)$

Odpowiedź: $m \in (-6{,}5;\; -6) \cup (-6;\; -5{,}5)$

Zad 13. $A = (-5;\;\; 3) \qquad B = (0;\;\; 6)$ środek leży na prostej $x - 3y + 1 = 0$

Przekształćmy do postaci $x = 3y - 1$

współrzędne środka okręgu $(3y - 1;\;\; y)$

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ równanie okręgu.

Jeżeli za ***x*** i ***y*** wstawimy współrzędne punktu A lub B za ***a*** i ***b*** współrzędne środka leżącego na danej prostej to otrzymamy dwa równania:

$\begin{cases}(-5 - 3y + 1)^2 + (3 - y)^2 = r^2 \\ (0 - 3y + 1)^2 + (6 - y)^2 = r^2\end{cases}$

$\begin{cases}(-4 - 3y)^2 + (3 - y)^2 = r^2 \\ (1 - 3y)^2 + (6 - y)^2 = r^2\end{cases}$

$\begin{cases}16 + 24y + 9y^2 + 9 - 6y + y^2 = r^2 \\ 1 - 6y + 9y^2 + 36 - 12y + y^2 = r^2\end{cases}$

$\begin{cases}10y^2 + 18y + 25 = r^2 \\ 10y^2 - 18y + 37 = r^2\end{cases}$

$10y^2 + 18y + 25 = 10y^2 - 18y + 37$

$18y + 18y = 37 - 25$

$36y = 12 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3} \qquad x = 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 0 \quad S = \left(0;\;\; \frac{1}{3}\right)$ współrzędne środka okręgu

Teraz obliczymy promień okręgu czyli np. odległość punktu B od punktu S

$B = (0;\;\; 6) \;\; S = \left(0;\;\; \frac{1}{3}\right) \;\; |BS| = 6 - \frac{1}{3} = 5\frac{2}{3} = \frac{17}{3}$ są to dwa punkty leżące na osi OY więc nawet wzór na długość odcinka nie jest konieczny

Odpowiedź: Równanie okręgu to $(x - 0)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{17}{3}\right)^2$ czyli $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$

Są też inne sposoby na rozwiązanie. Przykładowo można wyznaczyć prostą AB, środek odcinka AB, prostopadłą do AB przechodzącą przez środek i z układu równań tej prostej z daną prosta wyznaczyć środek okręgu a końcówka jak u mnie.

Zad 14. $(a;\; b;\; c)$ ciąg arytmetyczny $a + b + c = 27$ $(a - 2;\;\; b;\;\; 2c + 1)$ - ciąg geometryczny

Z ciągu arytmetycznego $a + a + r + a + 2r = 27$

$3a + 3r = 27 \quad \Rightarrow \quad a + r = 9 \quad \Rightarrow \quad b = 9$

$b = 9 \quad \Rightarrow \quad a = 9 - r \quad \Rightarrow \quad c = 9 + r$

$(7 - r;\quad 9;\quad 2(9 + r) + 1)$ - ciąg geometryczny

$\frac{9}{7-r} = \frac{2(9+r)+1}{9}$ czyli $\frac{9}{7-r} = \frac{2r+19}{9}$

$(7-r)(2r+19) = 9 \cdot 9$

$14r + 133 - 2r^2 - 19r = 81$

$-2r^2 - 5r + 133 - 81 = 0$

$-2r^2 - 5r + 52 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 52 = 25 + 416 = 441 \qquad \sqrt{441} = 21$

$r_1 = \frac{5-21}{-4} = \frac{-16}{-4} = 4 \qquad r_2 = \frac{5+21}{-4} = \frac{26}{-4} = -6{,}5$

Rozwiązanie dla $r = 4$: $(9-r;\ 9;\ 9+r) = (5;\ 9;\ 13)$

Rozwiązanie dla $r = -6{,}2$

Zad 15. Pole powierzchni całkowitej walca $P = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h)$

Objętość walca $V = \pi r^2 h$

Wyznaczamy wzór na ***h*** z pola powierzchni

$2\pi rh = P - 2\pi r^2$

$h = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{P}{2\pi r} - r$

Wstawiamy to do wzoru na objętość

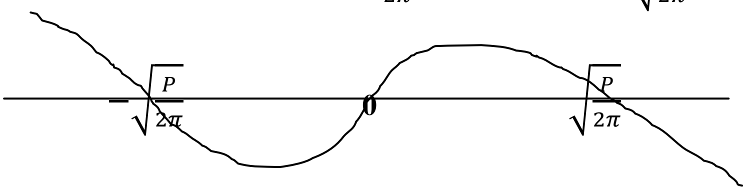
$V = \pi r^2 \left(\frac{P}{2\pi r} - r\right) = \frac{\pi r^2 P}{2\pi r} - \pi r^3 = \frac{rP}{2} - \pi r^3$

$V(r) = \frac{rP}{2} - \pi r^3$ Objętość jako funkcja zmiennej r

Obliczmy dla jakich r funkcja przyjmuje wartości dodatnie, czyli: $\frac{rP}{2} - \pi r^3 > 0$

$r\left(\frac{P}{2} - \pi r^2\right) > 0$

$r_1 = 0 \ \vee \ \frac{P}{2} - \pi r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{P}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad r_2 = \sqrt{\frac{P}{2\pi}} \quad \vee \quad r_3 = -\sqrt{\frac{P}{2\pi}}$



mamy pierwiastki: $r_1 = 0 \quad r_2 = \sqrt{\frac{P}{2\pi}}$ pierwiastek $r_3 = -\sqrt{\frac{P}{2\pi}}$ jako ujemny wychodzi poza warunki zadania. Funkcja ma wartości dodatnie dla $r \in \left(0;\ \sqrt{\frac{P}{2\pi}}\right)$ czyli $D = \left(0;\ \sqrt{\frac{P}{2\pi}}\right)$

$V'(r) = \frac{P}{2} - 3\pi r^2 \qquad D = \left(0;\ \sqrt{\frac{P}{2\pi}}\right)$

$\frac{P}{2} - 3\pi r^2 = 0$ Obliczymy dla jakiego r objętość przyjmuje wartość ekstremalną

$3\pi r^2 = \frac{P}{2} \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{P}{6\pi} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$

Teraz trzeba zbadać czy to jest maksimum czy minimum

Dla $r < \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$ będzie $3\pi r^2 < \frac{P}{2}$ czyli $\frac{P}{2} - 3\pi r^2 > 0$

analogicznie Dla $r > \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$ będzie $3\pi r^2 > \frac{P}{2}$ czyli $\frac{P}{2} - 3\pi r^2 < 0$

Mamy więc maksimum

Obliczymy teraz objętość tego walca dla $r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$

Aby to zrobić trzeba obliczyć sobie wartość ***h*** dla takiego ***r***

$$h=\frac{P-2\pi r^2}{2\pi r}=\frac{P-2\pi\left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right)^2}{2\pi\sqrt{\frac{P}{6\pi}}}=\frac{P-2\pi\frac{P}{6\pi}}{\sqrt{\frac{4P\pi^2}{6\pi}}}=\frac{P-\frac{1}{3}P}{\sqrt{\frac{2P\pi}{3}}}=\frac{2}{3}P\sqrt{\frac{3}{2P\pi}}=\sqrt{\frac{4\cdot 3P^2}{9\cdot 2P\pi}}=\sqrt{\frac{2P}{3\pi}}$$

[stosowanie wzoru w postaci $h=\frac{P}{2\pi r}-r$ okazuje się drogą nieporównanie trudniejszą]

$$V=\pi r^2 h=\pi\left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right)^2\sqrt{\frac{2P}{3\pi}}=\pi\frac{P}{6\pi}\sqrt{\frac{2P}{3\pi}}=\frac{P}{6}\sqrt{\frac{2P}{3\pi}}=\sqrt{\frac{2P^3}{36\cdot 3\pi}}=\sqrt{\frac{P^3}{18\cdot 3\pi}}=\sqrt{\frac{P^3}{54\pi}}$$

lub $V=\sqrt{\frac{P^3}{54\pi}}=\frac{P}{3}\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$

Odpowiedź Maksymalna objętość tego walca wynosi $V=\sqrt{\frac{P^3}{54\pi}}=\frac{P}{3}\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$