Rozwiązania listopad 2016
Zadania zamknięte

Zad 1. $\frac{\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\cdot 4^{-\frac{1}{4}}}{0{,}25} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\cdot\frac{4}{1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{1}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} = -2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\left(-2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$ **(B)**

Zad 2. $\log_5 50 - \log_5 2 = \log_5\frac{50}{2} = \log_5 25 = 2$ czyli $\frac{a-b}{2} = \frac{2}{2} = 1$ **(D)**

Zad 3. Październik –x; listopad – 1,1x; grudzień – 0,6x.
średnia: $\frac{x+1{,}1x+0{,}6x}{3} = \frac{2{,}7x}{3} = 0{,}9x$ czyli średnia to 90% października **(A)**

Zad 4. $(x-2)(2+x) < 0$ pierwiastki równania to $x_1 = 2$ $x_2 = -2$. Gdyby wymnożyć nawiasy to otrzymalibyśmy $x^2 - 4 < 0$. Otrzymujemy wykres gałęziami do góry więc wartości ujemne są między pierwiastkami $x \in (-2;\ \ 2)$ **(D)**

Zad 5. $\frac{-3(9-x^2)(x+3)}{x(x+3)} = 0$ Dziedzina wyrażenia $x \in R\backslash\{0;\ -3\}$

$\frac{-3(9-x^2)(x+3)}{x(x+3)} = \frac{-3(3-x)(3+x)(x+3)}{x(x+3)}$ przyrównując licznik do zera i uwzględniając fakt że $x \neq -3$ z powodu mianownika, otrzymujemy tylko 1 pierwiastek z $3 - x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 3$ **(B)**

Zad 6. $\frac{2+\sqrt{3}}{a+1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ Wymnażając na krzyż mamy $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = (a+1)\cdot 1$

$4 - 3 = a + 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 = a + 1 \quad \Longrightarrow \quad a = 0$ **(C)**

Zad 7. $\begin{cases} y = (m+2)x + 2m \\ (2m-1)x - m = y \end{cases}$ proste są równoległe gdy maja ten sam współczynnik kierunkowy czyli

$m + 2 = 2m - 1$

$m - 2m = -1 - 2$

$-m = -3 \quad \Longrightarrow \quad m = 3$ **(C)**

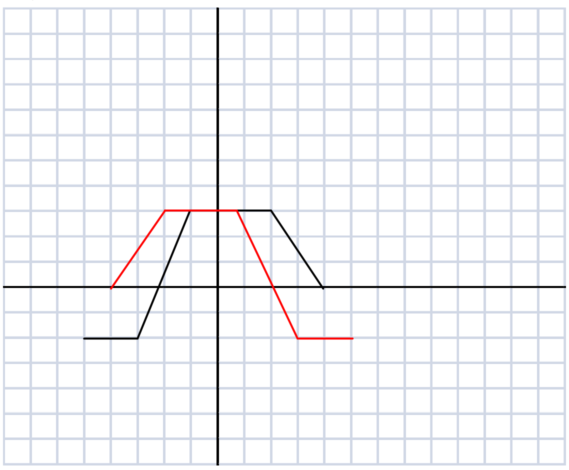
Zad 8. $(x-2)(x+1)(x-3) = 0$

$(x-2) = 0 \ \vee\ (x+1) = 0 \ \vee\ (x-3) = 0$

$x_1 = 2 \ \vee\ x_2 = -1 \ \vee\ x_3 = 3$

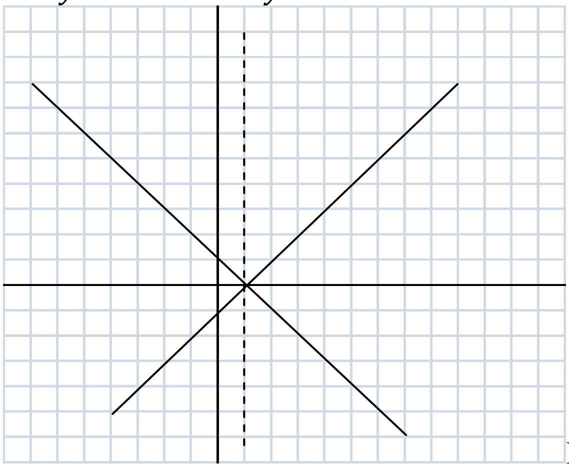
$2 + (-1) + 3 = 4$ **(D)**

Zad 9.



$g(x) = f(-x)$ (wykres czerwony). To na przedziale $\langle -4;\ \ -1\rangle$najmniejsza wartość jest 0 w punkcie – 4. **(C)**

Zad 10. $y = x - 1$ oraz $y = -x + 1$



Dwusiecznymi są proste x = 1 oraz oś OX czyli y = 0.

Tylko punkt P = (1; 0) spełnia te warunki i to oba **(D)**

Zad 11. Z tabelki widać że dla kolejnych x wartość wzrasta o 2. $-4 - (-6) = -4 + 6 = 2$
podobnie $-2 - (-4) = -2 + 4 = 2$ kolejna wartościv dla x = 2 musi wynosić 0 **(C)**

Zad 12. $f(x) = ax + b \quad b = -3$ oraz $ab < 0$ więc *a* musi być dodatnie gdy b = – 3 jest ujemne. Tak więc gdy *a* dodatnie to funkcja rosnąca. **(A)**

Zad 13. $f(x) = (x-1)^2 + 2$ czyli $p = 1; \quad q = 2$ współrzędne wierzchołka. Mamy określoną dziedzinę jako $D = \langle -2; +\infty)$ Zgodnie z podanym wzorem gałęzie idą do góry, oraz ***p = 1*** należy do dziedziny. Wykresem jest cała prawa gałąź łącznie z wierzchołkiem oraz przedziałem $\langle -2; \quad 1\rangle$ z lewej gałęzi, więc zbiór wartości to $\langle q; +\infty) = \langle 2; +\infty)$ **(B)**

Zad 14. $g(x) = 3^{x-1} + 1 \quad h(x) = g(x+1) - 4 = 3^{x-1+1} + 1 - 4 = 3^x - 3$
$h(x) = 3^x - 3 \quad h(1) = 3^1 - 3 = 3 - 3 = 0$
albo $3^x - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3^x = 3^1 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$ **(C)**

Zad 15. $x - 1 \leq \frac{x(x-1)-x^2}{2} \leq 1$
$x - 1 \leq \frac{x^2-x-x^2}{2} \leq 1$
$x - 1 \leq \frac{-x}{2} \leq 1$ |pomnożymy wszystko przez 2
$2x - 2 \leq -x \leq 2$ Mamy do rozwiązania dwie nierówności $2x - 2 \leq -x$ oraz $-x \leq 2$
a) $2x - 2 \leq -x$ b) $-x \leq 2$
$2x + x \leq 2$ $x \geq -2$
$3x \leq 2 |: 3$
$x \leq \frac{2}{3}$ Liczby spełniające obie nierówności to -2; - 1; 0 **(D)**

Zad 16. $a_1 = 5; \quad a_2 = 10; \; \ldots\ldots\ldots \; a_n = 395$ Obliczyć sumę czyli S_n
Ciąg arytmetyczny $r = a_2 - a_1 = 10 - 5 = 5 \quad a_n = a_1 + (n-1)r$
$5 + (n-1)5 = 395$
$5 + 5n - 5 = 395$
$5n = 395$
$n = \frac{395}{5} = 79$
$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n \quad S_{79} = \frac{5+395}{2} \cdot 79 = \frac{400}{2} \cdot 79 = 200 \cdot 79 = 15800$ **(A)**

Zad 17. Ciąg arytmetyczny $a_1 + a_2 + a_3 = 18$ czyli $a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r = 18$ więc
$3a_1 + 3r = 18 \quad \Longrightarrow \quad 3(a_1 + r) = 18 \quad \Longrightarrow \quad 3a_2 = 18 \quad \Longrightarrow \quad a_2 = 6$ **(C)**

Zad 18. $a_n = \sqrt{n-2} \quad n \geq 2$ Dla $n = 6 \; mamy \; a_6 = \sqrt{6-2} = \sqrt{4} = 2$ więc wyrazy mniejsze od 2 to $a_2; \; a_3; \; a_4; \; a_5$ razem 4 (tu nie ma wyrazu a_1) **(B)**

Zad 19. Jeżeli (a; 2; c) geometryczny to $a_1 = a; \quad a_2 = 2 = a_1 \cdot q; \quad a_3 = a_2 \cdot q = 2 \cdot q$ Ze wzoru na a_2 mamy $a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{2}{q}$ Iloczyn $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = \frac{2}{q} \cdot 2 \cdot 2 \cdot q = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ **(A)**

Zad 20. $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} = \frac{17}{13}$ $\sin\alpha - \sin\beta = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} = \frac{7}{13}$

$\begin{cases} a+b=17 \\ a-b=7 \end{cases}$ dodając równania mamy $2a = 17+7 \quad \Rightarrow \quad 2a = 24 \quad \Rightarrow \quad a = 12; \quad b = 5$

$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{12}{5}$ **(D)**

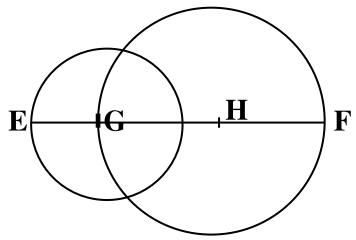
Zad 21. $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$ Korzystając z jedynki trygonometrycznej $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ mamy $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$. Wstawiając to do zadanego równania mamy $\sin^2\alpha - (1 - \sin^2\alpha) = \frac{1}{2}$

$\sin^2\alpha - 1 + \sin^2\alpha = \frac{1}{2}$

$2\sin^2\alpha = \frac{1}{2} + 1 \quad \Rightarrow \quad 2\sin^2\alpha = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

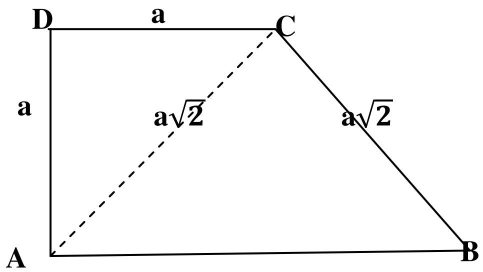
$\alpha = 60°$ **(C)**

Zad 22.



Jeżeli |GH| = 3 (promień) to |GF| = 6 (średnica) |EF| = 8 to |EG| = 8 – 6 = 2 (promień mniejszego koła) $P_1 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$ pole większego koła $P_2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ $P_1 - P_2 = 9\pi - 4\pi = 5\pi$ **(D)**

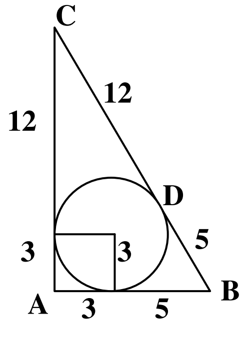
Zad 23.



Wiadomym jest że przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego równoramiennego ma długość $a\sqrt{2}$ gdy przyprostokątna ma długość a

Tak więc $AB = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2a$ **(B)**

Zad 24.



Obwód = (12 + 5) + (12 + 3) + (5 + 3) = 17 + 15 + 8 = 40 **(A)**

Zad 25. $A = (-23;\ -9)$ $B = (17;\ 21)$ Obliczamy współrzędne środka odcinka AB

$x = \frac{-23+17}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ $y = \frac{-9+21}{2} = \frac{12}{2} = 6$ $S = (-3;\ 6)$

Obliczamy współrzędne środka odcinka AS i to jest punkt M

$x = \frac{-23-3}{2} = \frac{-26}{2} = -13$ $y = \frac{-9+6}{2} = \frac{-3}{2} = -1{,}5$ $M = (-13;\ -1{,}5)$

Odp: $-13 \cdot (-1{,}5) = 19{,}5$ **(C)**

Zadania otwarte

Zad 26. $x(x-1) > 2(x+1) - 4$

$x^2 - x > 2x + 2 - 4$

$x^2 - x - 2x - 2 + 4 > 0$

$x^2 - 3x + 2 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ - pierwiastki równania.

dla gałęzi skierowanych do góry, rozwiązanie nierówności (wartości dodatnie) jest na zewnątrz pierwiastków czyli $x \epsilon (-\infty; \ \ 1) \cup (2; \ \ +\infty)$

Zad 27. $2(x-1)(x+1) - 2y(2x-y) = -1$ dla $x > y$

$2(x^2 - 1) - 4xy + 2y^2 = -1$

$2x^2 - 2 - 4xy + 2y^2 = -1$

$2x^2 - 4xy + 2y^2 = -1 + 2$

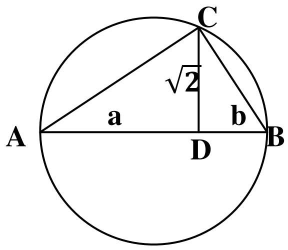
$2x^2 - 4xy + 2y^2 = 1 | : 2$

$x^2 - 2xy + y^2 = \frac{1}{2}$

$(x-y)^2 = \frac{1}{2}$

$x - y = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Założenie $x > y$ jest niezbędne bo dla $x < y$ jest $x - y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Zad 28.



Trójkąt ABC jest prostokątny (kąt wpisany oparty na półokręgu) Trójkąty ACD i DBC też prostokątne bo CD prostopadłe do AB. Tak więc wszystkie trójkąty są podobne bo są prostokątne i mają jeden kąt wspólny z dużym trójkątem. Zapiszemy stosunek dłuższej przyprostokątnej do krótszej w trójkątach ACD i DBC.

$\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{b}$ wymnażając na krzyż mamy $a \cdot b = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ czyli $a \cdot b = 2$

Zad 29. $x_1 = -3 \ \ (p; \ \ q) = (-1; \ \ -8) \ \ f(x) = ax^2 + bx + c$

Jeżeli $x_1 = -3$ oraz $p = -1$ to $x_2 = 1$ $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$ bo wierzchołek jest pośrodku między miejscami zerowymi czyli $-1 = \frac{-3+x}{2} \ | \cdot 2$

$-2 = -3 + x \quad \Rightarrow \quad -2 + 3 = x \quad \Rightarrow \quad x = 1$

Tak więc stosując wzór na postać iloczynową funkcji kwadratowej mamy

$f(x) = a(x+3)(x-1)$ Teraz wstawiając do wzoru współrzędne punktu $(-1; \ \ -8)$ mamy

$-8 = a(-1+3)(-1-1)$

$a \cdot 2 \cdot (-2) = -8$

$-4a = -8 \quad \Rightarrow \quad a = 2$

$f(x) = 2(x+3)(x-1)$ lub $f(x) = 2(x^2 - x + 3x - 3)$

$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

Zad 30. $y = (x-1)^2 + 1$ parabola mająca wierzchołek w punkcie $A = (1; \ \ 1)$

prosta $y = ax$ przechodzi przez $(0; \ \ 0)$. Aby ta parabola miała punkty wspólne z prostą trzeba ich wzory porównać i rozwiązać równanie $ax = (x-1)^2 + 1$

$ax = x^2 - 2x + 1 + 1$

$x^2 - 2x + 2 - ax = 0$

$x^2 - 2x - ax + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 + 4a + a^2 - 8 = a^2 + 4a - 4$

Ma to być jeden punkt wspólny więc $\Delta = 0$ czyli $a^2 + 4a - 4 = 0$

$\Delta_1 = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16 + 16 = 32 \qquad \sqrt{\Delta_1} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$

$a_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta_1}}{2a} = \frac{-4-4\sqrt{2}}{2} = -2 - 2\sqrt{2} \qquad a_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta_1}}{2a} = \frac{-4+4\sqrt{2}}{2} = -2 + 2\sqrt{2}$

Prostymi stycznymi do paraboli są: $y = (-2 - 2\sqrt{2})x$ oraz $y = (-2 + 2\sqrt{2})x$ Dodatkowo prosta o równaniu $x = 0$ czyli oś OY też spełnia warunki zadania bo przecina parabolę tylko w jednym punkcie $(0; \ \ 2)$.

Zad 31. x – aktualny wiek Danki

x + y aktualny wiek Anki

Sytuacja z przed ***y*** lat

x – y wiek Danki

x + y – y =x wiek Anki Wtedy to Anka była 3 razy starsza od Danki więc x = 3(x – y)

Sytuacja z ***y*** lat

x + y – wiek Danki

x + 2y = 42 – wiek Anki

Z tych ustaleń mamy układ równań $\begin{cases} x = 3(x-y) \\ x + 2y = 42 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3x - 3y \\ x + 2y = 42 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 3x + 3y = 0 \\ \quad x + 2y = 42 \end{cases}$

$\begin{cases} \ -2x + 3y = 0 \\ x + 2y = 42 | \cdot 2 \end{cases}$

$\begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ 2x + 4y = 84 \end{cases}$ Dodając równania x się zeruje

$7y = 84 |: 7$

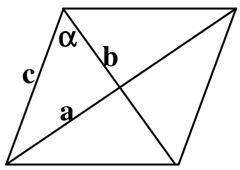
$y = 12$ teraz korzystając z równania $x + 2y = 42$

$x + 2 \cdot 12 = 42$

$x = 42 - 24 = 18$

$\begin{cases} x = 18 \\ y = 12 \end{cases}$ Danka ma lat 18 Anka ma 18 + 12 = 30 lat.

Zad 32.



przekątne dzielą się na połowy i zawierają się w dwusiecznych kątów. Jeżeli suma przekątnych wynosi 68 to a + b = 34 czyli b = 34 – a $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a}{34-a} = 2{,}4$

$\frac{a}{34-a} = 2{,}4 \ | \cdot (34 - a)$

$a = 2{,}4(34 - a)$

$a = 81{,}6 - 2{,}4a$

$a + 2{,}4a = 81{,}6$

$3{,}4a = 81{,}6$

$a = \frac{81{,}6}{3{,}4} = 24 \quad b = 34 - 24 = 10$ obliczmy bok rombu z tw. Pitagorasa $a^2 + b^2 = c^2$

$c^2 = 24^2 + 10^2$

$c^2 = 576 + 100 = 676$

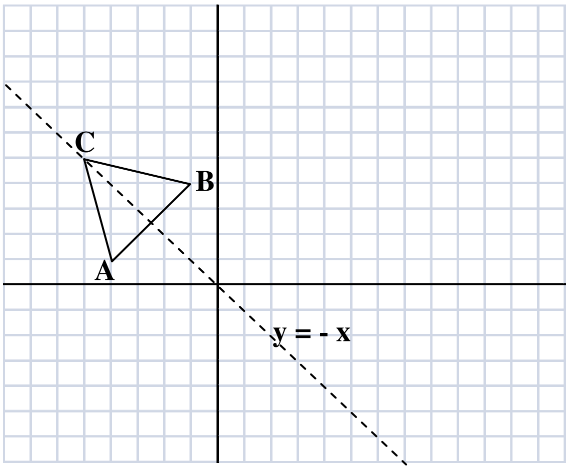
$c = \sqrt{676} = 26$

$4c = 4 \cdot 26 = 104$ Obwód rombu wynosi 104

Zad 33. Trójkąt równoramienny

$A = (-4; \ \ 1) \quad C = (-5; \ \ 5)$ |AC| = |BC|

–x – y = 0 czyli y = – x symetralną boku AB



Symetralna boku AB ma wzór $y = -x$ czyli jej współczynnik kierunkowy $a_1 = -1$ Tak więc prosta AB ma współczynnik kierunkowy $a_2 = 1$ $(a_1 \cdot a_2 = -1)$

Prosta AB ma wzór $y = x + b$ i przechodzi przez punkt $A = (-4;\ \ 1)$

$1 = -4 + b \quad \Rightarrow \quad b = 1 + 4 \quad \Rightarrow \quad b = 5$

$y = x + 5$ prosta AB. Teraz rozwiązując układ równań $\begin{cases} y = -x \\ y = x + 5 \end{cases}$ Obliczymy współrzędne punktu przecięcia prostej AB z jej symetralną, czyli współrzędne środka podstawy trójkąta.

$x + 5 = -x$

$2x = -5 |: 2$

$x = -2{,}5 \quad y = -x = -(-2{,}5) = 2{,}5 \quad S = (-2{,}5;\ \ 2{,}5)$ Teraz można obliczyć długość odcinka AS – połowa podstawy jak również długość SC – wysokość trójkąta.

$|AS| = \sqrt{\left(-2{,}5 - (-4)\right)^2 + (2{,}5 - 1)^2} = \sqrt{(1{,}5)^2 + (1{,}5)^2} = \sqrt{2{,}25 + 2{,}25} = \sqrt{4{,}5} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad |AB| = 2 \cdot |AS| = 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$|CS| = \sqrt{\left(-2{,}5 - (-5)\right)^2 + (2{,}5 - 5)^2} = \sqrt{(2{,}5)^2 + (-2{,}5)^2} = \sqrt{6{,}25 + 6{,}25} = \sqrt{12{,}5} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$P = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{15\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{4} = \frac{15 \cdot 2}{4} = \frac{30}{4} = 7{,}5$

Zad 34. $(x - 3;\ \ x;\ \ y)$ ciąg arytmetyczny; $(x;\ \ y;\ \ 2y)$ ciąg geometryczny.

z ciągu arytmetycznego $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ czyli $x - (x - 3) = y - x$

z ciągu geometrycznego $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$ czyli $\frac{y}{x} = \frac{2y}{y}$ ciąg geometryczny ma być o wyrazach dodatnich więc można wykonać skrócenie $\frac{y}{x} = \frac{2}{1}$ czyli $y = 2x$ Mamy więc układ równań

$\begin{cases} x - (x - 3) = y - x \\ y = 2x \end{cases}$

$\begin{cases} x - x + 3 = y - x \\ y = 2x \end{cases}$

$\begin{cases} 3 = y - x \\ y = 2x \end{cases}$ wstawiając drugie równanie do pierwszego mamy

$3 = 2x - x \quad \Rightarrow \quad x = 3$

$y = 2x = 2 \cdot 3 = 6$

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases}$ Odpowiedź: Ciąg arytmetyczny to $(0;\ \ 3;\ \ 6)$, ciąg geometryczny to $(3;\ \ 6;\ \ 9)$