Matura poprawkowa sierpień 2016r

<u>*Zadania zamknięte*</u>

Zad 1. $x+x+1+x+2+x+3+x+4=195$

$5x+10=195 \qquad 5x=185|:5 \qquad x=37$ **(A)**

Zad 2. $220-176=44$ wielkośc obniżki

$\frac{44}{220}\cdot 100\% = \frac{1}{5}\cdot 100\% = 20\%$ **(B)**

Zad 3. $\frac{4^5\cdot 5^4}{20^4} = \frac{4^4\cdot 4\cdot 5^4}{20^4} = \frac{(4^4\cdot 5^4)\cdot 4}{20^4} = \frac{20^4}{20^4}\cdot 4 = 4$ **(D)**

Zad 4. $\frac{\log_3 729}{\log_6 36} = \frac{\log_3 3^6}{\log_6 6^2} = \frac{6}{2} = 3$ **(B)**

Zad 5. $\frac{x}{5}+\sqrt{7}>0 \qquad \sqrt{7}\approx 2{,}64$ Można wykonać sprawdzenie

$\frac{x}{5}>-\sqrt{7} \qquad \frac{-13}{5}=-2{,}6>-2{,}64$

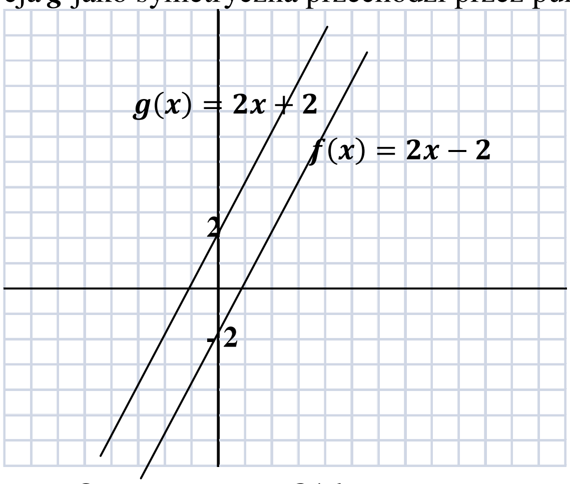
Albo rozwiązać $\frac{x}{5}>-\sqrt{7}|\cdot 5$

$x>5\cdot\left(-\sqrt{7}\right) \qquad x>-13{,}22\cdots$ **(B)**

Zad 6. $f(x)=(x-1)(x-9)=x^2-9x-x+9=x^2-10x+9$

$p=\frac{-b}{2a}=\frac{10}{2}=5$ widzimy, że ***a*** dodatnie więc gałęzie do góry czyli rosnąca po prawej stronie wierzchołka ***p*** $x\in\langle 5;\ +\infty)$ **(A)**

Zad 7. Funkcje są rosnące się czyli $a=2$. Funkcja ***f*** przechodzi przez punkt $(0;\ -2)$ więc $b=-2$. Funkcja ***g*** jako symetryczna przechodzi przez punkt $(0;\ 2)$ więc $b=2$



(A)

Zad 8. $a_1=8 \qquad a_4=-216 \qquad a_4=a_1\cdot q^3 \qquad -216=8\cdot q^3|:8$

$q^3=-\frac{216}{8}=-27 \qquad q=\sqrt[3]{-27}=-3$ **(B)**

Zad 9. $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ To z jedynki trygonometrycznej mamy: $\left(\frac{4}{5}\right)^2+\cos^2\alpha=1$

$\cos^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25} \qquad \cos\alpha=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}.$

$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$ **(A)**

Zad 10. $f(x)=x^2+2x+3a$ Nie ma miejsc zerowych czyli:

$\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot 3a<0$

$4-12a<0 \qquad -12a<-4|:(-12) \qquad a>\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ **(D)**

Zad 11. $S_n=2n^2+n \qquad S_1=2\cdot 1^2+1=2+1=3=a_1$

$S_2=2\cdot 2^2+1=2\cdot 4+1=8+1=9=a_1+a_2$

$a_2=9-3=6$ **(B)**

Zad 12. $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ -4x+6y=-10 \end{cases}$ Wystarczy drugie równanie podzielić przez (-2) , aby przekonać się że mamy układ dwóch identycznych równań, a taki układ ma nieskończenie wiele rozwiązań. **(D)**

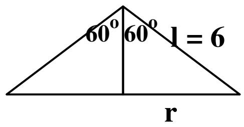
Zad 13. $\frac{|3-9|}{-3}=\frac{|-6|}{-3}=\frac{6}{-3}=-2$ **(B)**

Zad 14. $(x;\ \ y) = (m-1;\ \ 2m+5)$ $\frac{y}{x} = \frac{2m+5}{m-1} = \frac{2m-2+7}{m-1} = \frac{2m-2}{m-1} + \frac{7}{m-1} = 2 + \frac{7}{m-1}$

albo można tak $2m+5 = 2m-2+7$ i teraz $y = ax+b = \frac{2m-2}{m-1}x + 7 = 2x+7$ **(C)**

Zad 15. $\sin 60° = \frac{r}{6}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{6}$ $\qquad 2r = 6\sqrt{3}$ $\qquad r = 3\sqrt{3}$



(C)

Zad 16. $(\tan 60° + \tan 45°)^2 - \sin 60° = \left(\sqrt{3}+1\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 + 2\sqrt{3} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 + 1{,}5\sqrt{3}$ **(D)**

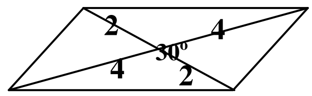
Zad 17. r promień walca

$h = 2r$ wysokość walca

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$ **(A)**

Zad 18. Przekątne dzielą równoległobok na 4 trójkąty o równych polach. Pole trójkąta takiego liczymy ze wzoru: $P = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\alpha$ tak więc cztery takie trójkąty to:

$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sin 30° = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$

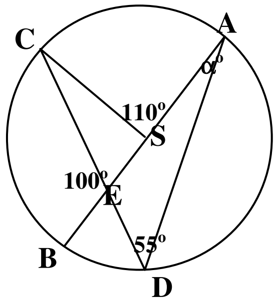


(D)

Zad 19. $\sphericalangle ADC = 55°$ jako wpisany oparty na tym samym łuku co kąt środkowy $\sphericalangle CSA$

$\sphericalangle AED = 100°$ jako kąt wierzchołkowy

Tak więc $\sphericalangle\alpha = 180° - (100° + 55°) = 180° - 155° = 25°$



(C)

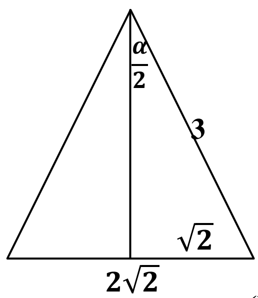
Zad 20. $S_1 = (3;\ \ 4)$ $\qquad S_2 = (9;\ \ -4)$.

Odległość między środkami: $\sqrt{(9-3)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

$10:2 = 5$ **(C)**

Zad 21. Przekątna kwadratu o boku 2 to $2\sqrt{2}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$



(D)

Zad 22. liczba krawędzie - $2n$

Liczba wierzchołków - $n+1$

$2n - (n+1) = 11$

$2n - n - 1 = 11$ $\qquad n = 11 + 1$ $\qquad n = 12$ **(C)**

Zad 23. $\frac{4+7+8+x}{4} + 2 = \frac{4+7+8+x+2}{5}$

$\frac{19+x}{4} + 2 = \frac{21+x}{5}\ |\cdot 20$

$5(19+x) + 40 = 4(21+x)$ $\qquad 95 + 5x + 40 = 84 + 4x$

$5x - 4x = 84 - 40 - 95$ $\qquad x = -51$ **(A)**

Zad 24. Takie liczby tworzą ciąg arytmetyczny: $a_1 = 12$ $\qquad r = 3$ $\qquad a_n = 99$

$a_n = a_1 + (n-1)r$ $\qquad 99 = 12 + (n-1)\cdot 3$

$99 = 12 + 3n - 3$ $\qquad 3n = 99 - 12 + 3$ $\qquad 3n = 90|:3$ $\qquad n = 30$ **(D)**

Zad 25. Rzucając 2 monetami mamy 4 możliwe wyniki czyli otrzymanie 2 orłów to prawdopodobieństwo $\frac{1}{4}$

Rzucając kostką mamy 6 wyników Wyrzucenie szóstki to prawdopodobieństwo $\frac{1}{6}$

Ostatecznie mamy: $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$ **(B)**

Zadania otwarte

Zad 26. $3x^2-6x\geq(x-2)(x-8)$

$3x^2-6x\geq x^2-2x-8x+16$

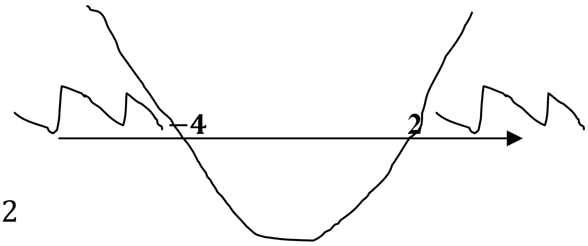
$3x^2-x^2-6x+10x-16\geq 0$

$2x^2+4x-16\geq 0|:2$

$x^2+2x-8\geq 0$

$\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-8)=4+32=36 \quad \sqrt{36}=6$

$x_1=\frac{-2-6}{2}=\frac{-8}{2}=-4 \qquad x_2=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=2$



Odp: $x\in(-\infty;\ \ -4\rangle\cup\langle 2;\ \ +\infty)$

Zad 27. x - licznik

y - mianownik

$$\begin{cases}\frac{x+32}{y}=2|\cdot y\\ \frac{x-6}{y-6}=\frac{8}{17}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+32=2y\\ 17(x-6)=8(y-6)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2y-32\\ 17(2y-38)=8(y-6)\end{cases}$$ Dalej przepisuję tylko równanie II

$34y-646=8y-48$

$34y-8y=646-48$

$26y=598|:26 \qquad y=23$

$x=2y-32=2\cdot23-32=46-32=14$

$$\begin{cases}x=14\\ y=23\end{cases}$$

Odpowiedź: Szukany ułamek to: $\frac{14}{23}$

Zad 28. Wykazać: jeżeli: $a\cdot b\cdot c=1$ to $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=ab+ac+bc$

Sprowadzając lewą stronę do wspólnego mianownika mamy:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc}{abc}+\frac{ac}{abc}+\frac{ab}{abc}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{bc+ac+ab}{1}=bc+ac+ab=ab+ac+bc$

(cbdo)

Zad 29. $f(x)=x^2-11x \qquad x\in\langle -6;\ \ 6\rangle$

$f(-6)=(-6)^2-11\cdot(-6)=36+66=102$

$f(6)=6^2-11\cdot6=36-66=-30$

Obliczymy jeszcze współrzędne wierzchołka czyli $(p;\ \ q)$

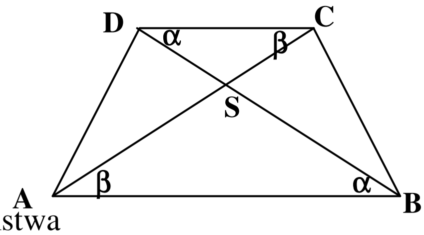
$p=-\frac{b}{2a}=-\frac{-11}{2}=\frac{11}{2}=5{,}5 \qquad 5{,}5\in\langle -6;\ \ 6\rangle$

$q=f(5{,}5)=(5{,}5)^2-11\cdot5{,}5=30{,}25-60{,}5=-30{,}25<-30$

Odpowiedź:

Najmniejsza wartością funkcji $f(x)=x^2-11x$ na przedziale $\langle -6;\ \ 6\rangle$ jest liczba $-30{,}25$.

Zad 30. Jeżeli $AS=\frac{5}{6}AC$ to $P_{ABS}=25P_{CDS}$



Trójkąty ABS i CDS są podobne gdyż mają odpowiednie kąty równe.

$\sphericalangle CDS=\sphericalangle ABS=\alpha$ kąty naprzemianległe

tak samo $\sphericalangle BAS=\sphericalangle DCS=\beta$.

Kąty przy wierzchołku S wierzchołkowe.

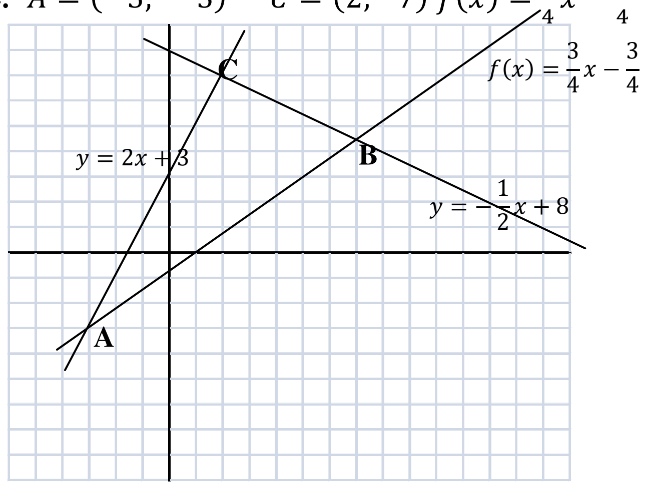
Jeżeli $AS=\frac{5}{6}AC$ to $CS=\frac{1}{6}AC$. Można więc wyliczyć skalę podobieństwa

między trójkątami ABS i CDS $k=\frac{AS}{CS}=\frac{\frac{5}{6}AC}{\frac{1}{6}AC}=5$

Wiemy też że stosunek pól figur podobnych wynosi $k^2 = 5^2 = 25$
Stąd mamy tezę zadania $P_{ABS} = k^2 P_{CDS} = 5^2 \qquad P_{CDS} = 25 P_{CDS}$

Zad 31. $a_n = 2016 - 3n \qquad a_1 = 2016 - 3 \cdot 1 = 2016 - 3 = 2013$
$2016 - 3n = 0$
$3n = 2016 |: 3 \qquad n = 672$ mamy więc $a_{672} = 0$
Czyli $a_{671} = 2016 - 3 \cdot 671 = 2016 - 2013 = 3$
Ciąg ten jest ciągiem arytmetycznym malejącym: $a_1 = 2013; \quad r = -3; \quad n = 671; \quad a_{671} = 3$
i mamy obliczyć sumę $S_{671} = \frac{a_1 + a_{671}}{2} \cdot n = \frac{2013+3}{2} \cdot 671 = \frac{2016}{2} \cdot 671 = 1008 \cdot 671 = 676368$
Odpowiedź: Suma wszytkich wyrazów dodatnich tego ciągu to 676368.
.

Zad 32. $A = (-3; \ -3) \quad C = (2; \ 7) \ f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$



Przeciwprostokątną ma być AB czyli przy wierzchołku C jest kąt prosty. Trzeba więc napisać równanie prostej AC a następnie prostej do niej prostopadłej BC a na koniec rozwiązać układ równań złożony z prostych AB i CB aby obliczyć współrzędne punktu B.
Równanie prostej AC: $A = (-3; \ -3) \quad C = (2; \ 7)$
$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7+3}{2+3} = \frac{10}{5} = 2$ Prosta AC ma postać $y = 2x + b$. Wstawmy punkt $C = (2; \ 7)$
$7 = 2 \cdot 2 + b \qquad 7 = 4 + b \qquad b = 3$
Prosta AC ma wzór $y = 2x + 3$
Prosta BC jako prostopadłą do niej ma współczynnik kierunkowy $a = -\frac{1}{2} \qquad (a_1 \cdot a_2 = -1)$
Prosta ta ma więc postać $y = -\frac{1}{2}x + b$ i przechodzi przez punkt $C = (2; \ 7)$
$7 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b \qquad 7 = -1 + b \qquad b = 8$
Prosta BC ma wzór $y = -\frac{1}{2}x + 8$
Rozwiązujemy teraz układ równań $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 8 \\ y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \end{cases}$ czyli:
$\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}x + 8$
$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x = 8 + \frac{3}{4} | \cdot 4$
$3x + 2x = 32 + 3 \qquad 5x = 35 |: 5 \qquad x = 7$
$y = -\frac{1}{2}x + 8 = -\frac{1}{2} \cdot 7 + 8 = -3{,}5 + 8 = 5{,}5$
$\begin{cases} x = 7 \\ y = 5{,}5 \end{cases}$ Odpowiedź: współrzędne punktu B to $(7; \ 5{,}5)$

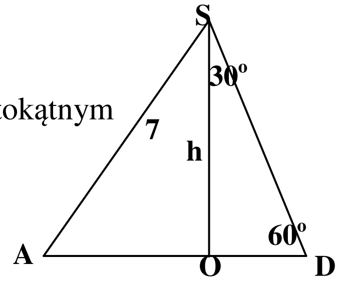
Zad 33. Trójkąt ADS wyznaczony przez wysokość podstawy (AD) i wysokość ściany bocznej (DS.) oraz przeciwległą krawędź boczną (AS) jest trójkątem z kątem 60° przy wierzchołku D.
W trójkącie tym prowadzimy wysokość SO na bok AD.
Podstawa ostrosłupa (trójkąt ABC) jest trójkątem równobocznym. Oznaczmy |AB| = a. Tak więc odcinek AD jako wysokość tego trójkąta ma długość $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Wiedząc że wysokość SO dzieli wysokość

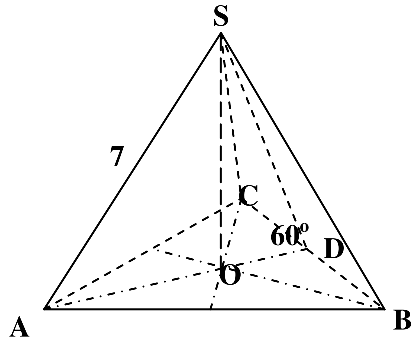
podstawy AD na odcinki w stosunku 2:1mamy:

$|AO| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$|OD| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Trójkąt DSO jest trójkątem prostokątnym o kątach 30^o; 60^o; 90^o.





Mamy więc $\tan 30° = \frac{OD}{h}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{h}$

$\sqrt{3}h = 3 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$\sqrt{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{2} |: \sqrt{3}$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{a}{2}$

Teraz stosując Twierdzenie Pitagorasa do trójkąta AOS mamy:

$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 7^2$

$\frac{3a^2}{9} + \frac{a^2}{4} = 49 \qquad \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = 49| \cdot 12$

$4a^2 + 3a^2 = 588 \qquad 7a^2 = 588|: 7 \qquad a^2 = 84$

$a = \sqrt{84} = \sqrt{4 \cdot 21} = 2\sqrt{21} \qquad h = \frac{a}{2} = \sqrt{21}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_p \cdot h$

$V = \frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{21} \cdot \frac{2\sqrt{21} \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{21} = \frac{21\sqrt{3} \cdot \sqrt{21}}{3} = 7\sqrt{63} = 7\sqrt{9 \cdot 7} = 7 \cdot 3\sqrt{7} = 21\sqrt{7}$

Odpowiedź: Objętość tego ostrosłupa wynosi$21\sqrt{7}$.

Zad 34. Losujemy 2 liczby ze zbioru $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$, więc pierwsza liczba może być wylosowana na 7 sposobów. Liczby mają się nie powtarzać więc druga liczba tylko na 6 sposobów.

$\overline{\overline{\Omega}} = 7 \cdot 6 = 42$

$A = \{54;\ 53;\ 52;\ 51;\ 15;\ 25;\ 35;\ 45\} \qquad \overline{\overline{A}} = 8$

$P(A) = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo tego że większa z wylosowanych liczb jest piątką wynosi $\frac{4}{21}$.