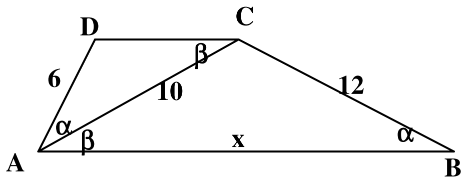
Czerwiec 2016 rok (poziom rozszerzony)(nowa matura)

Zadania zamknięte

Zad 1. $f(x)=|3+5^{3-x}|-1$ Wiadomym jest że dla każdej funkcji potęgowej [tutaj $f_1(x)=5^{3-x}$] zbiór wartości to $Zw=(0;\ +\infty)$ Mamy tu następnie [$f_2(x)=3+5^{3-x}$] więc cały wykres idzie o 3 w górę i mamy zbiór wartości $Zw=(3;\ +\infty)$ Potem jest wartość bezwzględna która w tym przypadku nic nie wnosi bo i tak zbiór wartości to były liczby dodatnie. Na koniec wszystko przesuwamy o 1 do dołu
$f(x)=|3+5^{3-x}|-1$ więc ostatecznie $Zw=(2;\ +\infty)$ **(A)**

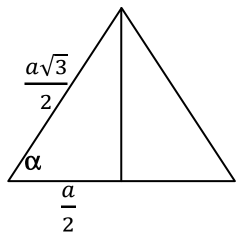
Zad 2. $\sin^2 75°-\cos^2 75°=-(-\sin^2 75°+\cos^2 75°)=-(\cos^2 75°-\sin^2 75°)=-\cos(2\cdot 75°)=-\cos 150°=-\cos(90°+60°)=-(-\sin 60°)=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(D)**

Zad 3. Dane mamy że $\sphericalangle DAC=\sphericalangle ABC=\alpha$
Natomiast $\sphericalangle BAC=\sphericalangle ACD=\beta$ jako kąty naprzemianległe i $AB||CD$
Z tego wynika że trójkąty ABC i ACD są podobne. Tak więc
$\frac{12}{x}=\frac{6}{10}$ $\qquad 6x=120|:6$ $\qquad x=20$



(B)

Zad 4. Jeżeli w tym ostrosłupie wszystkie krawędzie mają długość ***a*** to ściany boczne są trójkątami równobocznymi a więc wysokość ściany bocznej to $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Wykonując przekrój tego ostrosłupa wzdłuż wysokości ścian bocznych i przez środek podstawy mamy trójkąt
$\cos\alpha=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$



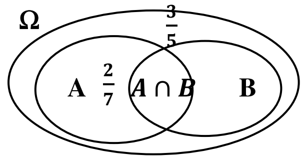
(A)

Zad 5. $\lim_{n\to+\infty}\frac{-7n^3+3n}{1+2n+3n^2+4n^5}$ widzimy że w mianowniku mamy wyższą potęgę niż w liczniku czyli jest to granica jak w przypadku $\lim_{n\to+\infty}\frac{a}{n^2}=0$ **(C)**

Zadania otwarte

Zad 6. $S=\frac{a_1}{1-q}=12$ gdzie $a_1=q$ czyli mamy
$\frac{q}{1-q}=12$ $\qquad q=(1-q)12$ $\qquad q=12-12q$
$q+12q=12$ $\qquad 13q=12|:13$ $\qquad q=\frac{12}{13}$ tak więc $a_1=\frac{12}{13}\approx 0{,}9230\cdots$
Odpowiedź: $\boxed{9}\boxed{2}\boxed{3}$

Zad 7. $A\cup B\setminus A=B\setminus A$ czyli $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{21}{35}-\frac{10}{35}=\frac{11}{35}\approx 0{,}31428\cdots$



Odpowiedź: : $\boxed{3}\boxed{1}\boxed{4}$

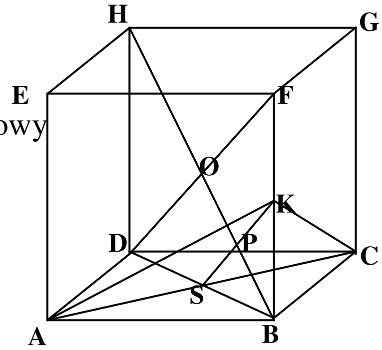
Zad 8. $\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{c+d}\ge\sqrt{ac}+\sqrt{bd}$ dla liczb dodatnich ***a; b; c; d*** :
Liczby są dodatnie więc podnoszenie do kwadratu jest operacją bezproblemową.
$\sqrt{(a+b)\cdot(c+d)}^2\ge\left(\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\right)^2$
$(a+b)\cdot(c+d)\ge ac+2\cdot\sqrt{ac}\cdot\sqrt{bd}+bd$
$ac+ad+bc+bd\ge ac+bd+2\sqrt{abcd}$
$ac+ad+bc+bd-ac-bd\ge 2\sqrt{abcd}$
$ad+bc\ge 2\sqrt{abcd}$ podnosimy jeszcze raz do kwadratu
$(ad+bc)^2\ge 4abcd$ $\qquad (ad)^2+2abcd+(bc)^2\ge 4abcd$

$(ad)^2 + 2abcd - 4abcd + (bc)^2 \geq 0.$
$(ad)^2 - 2abcd + (bc)^2 \geq 0$ czyli $(ad - bc)^2 \geq 0$
a to jest nierówność prawdziwa jako kwadrat liczby ***co należało wykazać.***

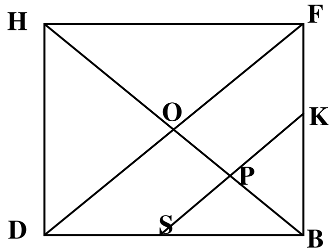
Zad 9. $|x^2 - 3x + 2| \geq |x - 1|$
1) ustalmy dla jakich $\boldsymbol{x}$: $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ a dla jakich $x^2 - 3x + 2 < 0$
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$ $\sqrt{1} = 1$
$x_1 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ $x_2 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$
$x^2 - 3x + 2 \geq 0$ dla $x \in (-\infty;\ 1\rangle \cup \langle 2;\ +\infty)$ natomiast $x^2 - 3x + 2 < 0$ dla $x \in (1;\ 2)$
Czyli mamy ustalone że $\begin{cases} |x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2 & dla \quad x \in (-\infty;\ 1\rangle \cup \langle 2;\ +\infty) \\ |x^2 - 3x + 2| = -(x^2 - 3x + 2) & dla \quad x \in (1;\ 2) \end{cases}$
2) Prostym jest ustalić że $\begin{cases} |x - 1| = x - 1 & dla\, x \geq 1 \\ |x - 1| = -x + 1 & dla\, x < 1 \end{cases}$
teraz przystępujemy do rozwiązywania nierówności dla poszczególnych przedziałów:
I) Rozwiązujemy nierówność dla $x \in (-\infty;\ 1)$
$x^2 - 3x + 2 \geq -x + 1$
$x^2 - 3x + 2 + x - 1 \geq 0$
$x^2 - 2x + 1 \geq 0$
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$
$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ Nierówność jest spełniona dla $x \in R$ ale rozwiązywaliśmy dla $x \in (-\infty;\ 1)$
czyli mamy $x \in (-\infty;\ 1)$
II) Sprawdzamy nierówność dla $x = 1$
$x^2 - 3x + 2 \geq x - 1$ czyli $1^2 - 3 \cdot 1 + 2 \geq 1 - 1$
$1 - 3 + 2 \geq 0$ $0 \geq 0$ prawda. Nierówność spełniona dla $x = 1$
III) Rozwiązujemy nierówność dla $x \in (1;\ 2)$
$-(x^2 - 3x + 2) \geq x - 1$
$-x^2 + 3x - 2 - x + 1 \geq 0$
$-x^2 + 2x - 1 \geq 0$
$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 4 - 4 = 0$
$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$ tu gałęzie wykresu idą do dołu więc mamy tylko $x = 1$ ale: $1 \notin (1;\ 2)$
IV) Rozwiązujemy nierówność dla $x \in \langle 2;\ +\infty)$
$x^2 - 3x + 2 \geq x - 1$
$x^2 - 3x + 2 - x + 1 \geq 0$
$x^2 - 4x + 3 \geq 0$
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$ $\sqrt{4} = 2$
$x_1 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$ $x_2 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$
$x \in [(-\infty;\ 1\rangle \cup \langle 3;\ +\infty)] \cap \langle 2;\ +\infty)$ $\Rightarrow$ $x \in \langle 3;\ +\infty)$
Odpowiedź: Rozwiązaniem nierówności jest zbiór: $(-\infty;\ 1) \cup \{1\} \cup \langle 3;\ +\infty) = (-\infty;\ 1\rangle \cup \langle 3;\ +\infty)$

Zad 10. $a_4 = 4$ $a_{n+1} = a_n + n - 4$
Przekształcając wzór na a_{n+1} mamy: $a_n = a_{n+1} - n + 4$ i teraz podstawiając $n = 3$ mamy:
$a_3 = a_{3+1} - 3 + 4 = 4 - 3 + 4 = 5$ $\Rightarrow$ $a_3 = 5$ następnie dla $n = 2$ mamy:
$a_2 = a_{2+1} - 2 + 4 = 5 - 2 + 4 = 7$ $\Rightarrow$ $a_2 = 7$ następnie dla $n = 1$ mamy:
$a_1 = a_{1+1} - 1 + 4 = 7 - 1 + 4 = 10$ $\Rightarrow$ $a_1 = 10$
Ustalmy czy jest malejący
Ciąg jest malejący gdy $a_{n+1} - a_n < 0$
$a_{n+1} - a_n = a_n + n - 4 - a_n = n - 4$
$n - 4$ może być większe lub mniejsze od zera w zależności od *n.* Dla $n > 4$ $n - 4 > 0$ czyli ciąg nie jest malejący
Odpowiedź: W tym ciągu $a_1 = 10$ a ciąg nie jest malejący .

Zad 11. Rozpatrujemy prostokąt BFHD



Trójkąty DBF i BKS są podobne. Są to trójkąty prostokątne oraz odcinki: $KB = \frac{1}{2}FB$ z założenia $BS = \frac{1}{2}BD$ - przekątne kwadratu dzielą się na połowy
Mamy więc podobieństwo tych trójkątów w skali $\frac{1}{2}$
Punkt O jest środkiem odcinka DF – przekątne prostokąta dzielą się na połowy analogicznie punkt P to środek odcinka KS.
Tak więc odcinek BO jest środkową trójkąta DBF a odcinek BP środkową trójkąta SBK, oraz $BP = \frac{1}{2}BO$ czyli $BP = \frac{1}{4}BH$ co daje nam tezę zadania
$|HP| = 3 \cdot |BP|$ lub inaczej $|BP|:|HP| = 1:3$



Zad 12. $k^2x^2 + (k-1)x + 1 = 0 \quad k \neq 0 \quad m = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$
I) Ustalamy kiedy istnieją dwa różne pierwiastki x_1; x_2 czyli $\Delta > 0$
$\Delta = (k-1)^2 - 4 \cdot k^2 \cdot 1 = k^2 - 2k + 1 - 4k^2 = -3k^2 - 2k + 1$
Teraz $\Delta > 0$ czyli $-3k^2 - 2k + 1 > 0$
$\Delta_k = (-2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1 = 4 + 12 = 16 \qquad \sqrt{16} = 4$
$k_1 = \frac{2-4}{2\cdot(-3)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} \qquad k_2 = \frac{2+4}{2\cdot(-3)} = \frac{6}{-6} = -1$ Mamy do czynienia z parabolą z gałęziami w dół
i pamiętając o tym że $k \neq 0$, to dwa pierwiastki x_1; x_2 istnieją dla $k \in (-1;\ 0) \cup \left(0;\ \frac{1}{3}\right)$
II) Ustalamy jak zmienia się $m = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ w zależności od $\boldsymbol{k}$
$m = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2}$
Teraz z wzorów Viete'a mamy: $x_2 + x_1 = \frac{-b}{a} = \frac{1-k}{k^2}$; $\qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{k^2}$
$m = \frac{x_2+x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\frac{1-k}{k^2}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{1-k}{k^2} \cdot \frac{k^2}{1} = \frac{1-k}{1} = 1 - k$
III) Mamy określić zbiór wartości funkcji $f(x) = 2^m = 2^{1-k} \qquad k \in (-1;\ 0) \cup \left(0;\ \frac{1}{3}\right)$
Policzmy wartości tej funkcji na końcach przedziałów
(końce przedziałów nie należą do przedziałów więc i wartości na końcach tych przedziałów nie będą należały do zbioru wartości)
dla $k = -1 \ f(x) = 2^{1-k} = 2^{1-(-1)} = 2^2 = 4$
dla $k = 0 \ f(x) = 2^{1-k} = 2^{1-0} = 2^1 = 2$
dla $k = \frac{1}{3} \ f(x) = 2^{1-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$
Odpowiedź: Tak więc zbiór wartości funkcji: $f(x) = 2^m = 2^{1-k}$ to $\left(\sqrt[3]{4};\ 2\right) \cup (2;\ 4)$

Zad 13. $(2\sin x - 3)(2\sin x + 1) > 0 \qquad x \in (0;\ 2\pi)$
Jeżeli iloczyn ma być większy od zera to są 2 możliwości: Oba nawiasy dodatnie lub oba nawiasy ujemne.
$(2\sin x - 3 > 0 \ \wedge \ 2\sin x + 1 > 0) \quad \vee \quad (2\sin x - 3 < 0 \ \wedge \ 2\sin x + 1 < 0)$
I) $2\sin x - 3 > 0 \ \wedge \ 2\sin x + 1 > 0$
$2\sin x - 3 > 0 | : 2 \qquad 2\sin x + 1 > 0 | : 2$
$\sin x - \frac{3}{2} > 0 \qquad \sin x + \frac{1}{2} > 0$
$\sin x > \frac{3}{2} \qquad \sin x > -\frac{1}{2}$ nierówność $\sin x > \frac{3}{2}$ nie ma rozwiązania bo $|\sin x| \leq 1$
Tak więc dla $2\sin x - 3 > 0 \ \wedge \ 2\sin x + 1 > 0 \quad x \in \emptyset$
II) $2\sin x - 3 < 0 \ \wedge \ 2\sin x + 1 < 0$
$2\sin x - 3 < 0 | : 2 \qquad 2\sin x + 1 < 0 | : 2$
$\sin x - \frac{3}{2} < 0 \qquad \sin x + \frac{1}{2} < 0$

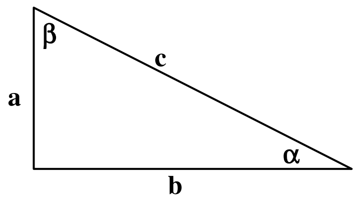
$\sin x < \frac{3}{2}$ $\sin x < -\frac{1}{2}$ nierówność $\sin x < \frac{3}{2}$ jest prawdziwa dla $x \in R$

Wystarczy więc rozwiązać $\sin x < -\frac{1}{2}$ dla $x \in (0;\ \ 2\pi)$

$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{7}{6}\pi \qquad x_2 = \frac{11}{6}\pi$

Odpowiedź: Rozwiązaniem nierówności jest przedział $x \in \left(\frac{7}{6}\pi;\ \ \frac{11}{6}\pi\right)$

Zad 14. $\frac{b-a}{c} = \frac{1}{2}$ czyli $\frac{b}{c} - \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$



Teraz stosując definicje funkcji trygonometrycznych w trójkącie mamy:

$\cos\alpha - \sin\alpha = \frac{1}{2}$

dokładając do tego jedynkę trygonometryczną mamy układ równań:

$$\begin{cases} \cos\alpha - \sin\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha = \cos\alpha - \frac{1}{2} \\ \left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$ i teraz rozwiązujemy II równanie

$\cos^2\alpha - \cos\alpha + \frac{1}{4} + \cos^2\alpha = 1$

$2\cos^2\alpha - \cos\alpha - \frac{3}{4} = 0$ podstawmy $\cos\alpha = x$ i otrzymujemy

$2x^2 - x - \frac{3}{4} = 0 | \cdot 4$

$8x^2 - 4x - 3 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-3) = 16 + 96 = 112 \qquad \sqrt{112} = \sqrt{16 \cdot 7} = 4\sqrt{7}$

$x_1 = \frac{4-4\sqrt{7}}{2\cdot 8} = \frac{4(1-\sqrt{7})}{16} = \frac{1-\sqrt{7}}{4} < 0 \qquad x_2 = \frac{4+4\sqrt{7}}{2\cdot 8} = \frac{4(1+\sqrt{7})}{16} = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{7}}{4} < 0$ nie spełnia warunków tego zadania gdyż w trójkącie prostokątnym funkcje trygonometryczne są dodatnie.

Wiadomym jest że $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$ czyli mamy:

gdy $\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$ to $\cos\beta = \cos\alpha - \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{7}}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{7}}{4} - \frac{2}{4} = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$

Odpowiedź: Kosinusami kątów ostrych w tym trójkącie są liczby: $\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$; $\cos\beta = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$

Zad 15. Wśród 10 cyfr mamy 5 cyfr parzystych $\{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8\}$ i 5 nieparzystych $\{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$

W szukanej liczbie pięciocyfrowej ma być 3 cyfry nieparzyste więc 2 parzyste

I) Obliczymy ile może być takich liczb nie uwzględniając faktu że na początku nie może być zero (traktujemy tu wszystkie cyfry jednakowo).

W konkretnej liczbie dla liczb nieparzystych wybieramy 3 miejsca z 5 (dla parzystych 2 z 5). Ta czynność może być wykonana na $\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$ sposobów. $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = \frac{20}{2} = 10$

Teraz z 5 cyfr nieparzystych tworzymy ciągi 3 cyfrowe (cyfry mogą się powtarzać) jest to więc wariacja z powtórzeniami. Analogicznie z 5 cyfr parzystych tworzymy ciągi 2 cyfrowe zgodnie ze wzorem na wariacje z powtórzeniami. Mamy więc: $10 \cdot 5^3 \cdot 5^2 = 10 \cdot 5^5 = 10 \cdot 3125 = 31250$.

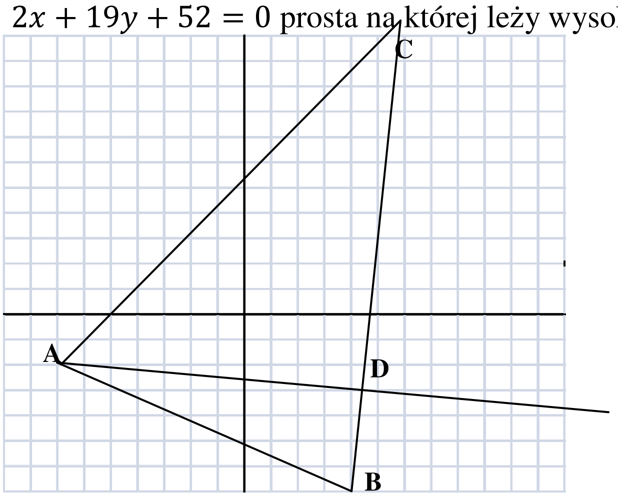
II) Teraz trzeba policzyć ile jest tak utworzonych liczb z zerem na początku, które trzeba od poprzedniego wyniku odjąć.

Mamy ustalone zero na początku liczby pięciocyfrowej. Na pozostałych czterech miejscach są 3 cyfry nieparzyste i jedna parzysta. Aby na 4 miejscach do wypełnienia zapisać 3 cyfry nieparzyste i 1 parzystą to można tego dokonać na 4 sposoby co do wyboru gdzie parzysta a gdzie nieparzysta $\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$. Teraz miejsca przeznaczone dla nieparzystych wypełniamy3 cyframi z 5 nieparzystych na 5^3 sposobów i jedno miejsce dla parzystych na 5 sposobów. Mamy więc $4 \cdot 5^3 \cdot 5 = 4 \cdot 5^4 = 4 \cdot 625 = 2500$

Ostatecznie $31250 - 2500 = 28750$

Odpowiedź: Liczb pięciocyfrowych w których występują 3 cyfry nieparzyste jest 28750.

Zad 16. $A = (-7;\ -2)$ $B = (4;\ -7)$ wierzchołki trójkąta równoramiennego AB – podstawa
$2x + 19y + 52 = 0$ prosta na której leży wysokość trójkąta AD opuszczona na bok BC



przekształcimy równanie prostej $2x + 19y + 52 = 0$ do postaci kierunkowej.
$19y = -2x - 52|:19$ $y = -\frac{2}{19}x - \frac{52}{19}$ Na prostej tej leży wysokość AD więc prosta na której leży bok BC jest do niej prostopadła. Współczynnik kierunkowy prostej BC $a = \frac{19}{2}$ $\left(-\frac{2}{19} \cdot \frac{19}{2} = -1\right)$
Prosta BC ma więc postać $y = \frac{19}{2}x + b$ i leży na niej punkt $B = (4;\ -7)$
$-7 = \frac{19}{2} \cdot 4 + b \quad \Rightarrow \quad -7 = 38 + b \quad \Rightarrow \quad b = -45$
$y = \frac{19}{2}x - 45$ - prosta na której leży bok BC.
W takim razie punkt C ma współrzędne $(x;\ \ y) = \left(x;\ \frac{19}{2}x - 45\right)$
Punkt C jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego więc AC = BC.
Ten fakt można wykorzystać na 2 sposoby. Stwierdzamy że odcinki AC i BC są równe i korzystamy ze wzoru na długość odcinka lub też stwierdzamy że C jest środkiem okręgu na którym leżą punkty A i B.
Skorzystamy tu ze wzoru na okrąg o środku w punkcie C z punktami A i B na okręgu.
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
$(-7 - x)^2 + (-2 - 9{,}5x + 45)^2 = r^2$ Do równania okręgu stawiony punkt $A = (-7;\ -2)$
$(4 - x)^2 + (-7 - 9{,}5x + 45)^2 = r^2$ Do równania okręgu stawiony punkt $B = (4;\ -7)$
Porównując te równania ze sobą mamy:
$(-7 - x)^2 + (-2 - 9{,}5x + 45)^2 = (4 - x)^2 + (-7 - 9{,}5x + 45)^2$ czyli
$(7 + x)^2 + (43 - 9{,}5x)^2 = (4 - x)^2 + (38 - 9{,}5x)^2$
$49 + 14x + x^2 + 1849 - 817x + 90{,}25x^2 = 16 - 8x + x^2 + 1444 - 722x + 90{,}25x^2$
widzimy że x^2 się redukuje
$14x - 817x + 8x + 722x = -49 - 1849 + 16 + 1444$
$-73x = -438|:(-73)$
$x = 6$ $y = \frac{19}{2} \cdot 6 - 45 = 57 - 45 = 12$ $C = (6;\ \ 12)$
Odpowiedź: Współrzędne wierzchołka C tego trójkąta wynoszą (6; 12).

Zad 17. $P_{pc} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi(r^2 + rh) = 2\pi$ pole powierzchni całkowitej walca.
Jeżeli $2\pi(r^2 + rh) = 2\pi$ to $r^2 + rh = 1$ czyli $rh = 1 - r^2$ $h = \frac{1-r^2}{r}$
Mamy wzór na objętość walca:
$V = \pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \left(\frac{1-r^2}{r}\right) = \pi r - \pi r^3$ Otrzymaliśmy wzór na objętość walca jako funkcję zmiennej r
$V(r) = \pi r - \pi r^3$ $r \in (0;\ \ 1)$ gdyby $r > 1$ to $h = \frac{1-r^2}{r} < 0$
Musimy wiedzieć że żadna z wielkości jak promień wysokość i objętość nie może być ujemna
$V'(r) = \pi - 3\pi r^2$
$\pi - 3\pi r^2 = 0$ szukamy dla jakiego r funkcja może mieć ekstremum
$3\pi r^2 = \pi|:3\pi \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad r_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 \notin D$
Teraz trzeba się upewnić że dla $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ mamy maksimum

dla $r < \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad r^2 < \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$ i wtedy $\pi - 3\pi r^2 > 0$

dla $r > \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad r^2 > \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$ i wtedy $\pi - 3\pi r^2 < 0$

Mamy po lewej stronie pochodną dodatnią a po prawej stronie $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ pochodną ujemną więc maksimum.

$V(r) = \pi r - \pi r^3 = \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{3\sqrt{3}\pi}{27} = \frac{3\sqrt{3}\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}\pi}{9} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$

Odpowiedź: Walec o polu powierzchni całkowitej równej 2π, ma największą objętość gdy promień podstawy $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Ta największa objętość $V = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$..