Matura II termin czerwiec 2016r

Zadania zamknięte

Zad 1. $\frac{7^6\cdot 6^7}{42^6}=\frac{7^6\cdot 6^6\cdot 6}{42^6}=\frac{42^6\cdot 6}{42^6}=6$ **(C)**

Zad 2. $1{,}3\cdot 1{,}2a=1{,}56a$ czyli podwyżka o 56% **(B)**

Zad 3. $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{3\cdot 3^{\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{3^{1\frac{1}{2}}}=\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ **(D)**

Zad 4. $50001^2-49999^2=(50001-49999)(50001+49999)=2\cdot 100000=200000$ **(B)**

Zad 5. $(x-y)(x+y)\quad x,y\in\{2;\ 3;\ 4\}$ dla $x=2\quad y=4$ uzyskamy:
$(2-4)(2+4)=-2\cdot 6=-12$ **(D)**

Zad 6. $\log_3\frac{3}{2}+\log_3\frac{2}{9}=\log_3\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{9}\right)=\log_3\frac{1}{3}=-1$ bo $3^{-1}=\frac{1}{3}$ **(A)**

Zad 7. $(x-8)(x^2-4)(x^2+16)=0$
$(x-8)(x-2)(x+2)(x^2+16)=0$
$x-8=0\ \vee\ x-2=0\ \vee\ x+2=0\ \vee\ x^2+16=0$
$x_1=8\qquad x_2=2\qquad x_3=-2\qquad x^2+16\neq 0$ suma $8+(-2)=6$ **(C)**

Zad 8. $\frac{x-7}{x}=5|\cdot x\quad\Longrightarrow\quad x-7=5x\quad\Longrightarrow\quad x-5x=7$
$-4x=7|:(-4)\quad\Longrightarrow\quad x=-\frac{7}{4}=-1{,}75\qquad x\in\langle -2;\ -1)$ **(B)**

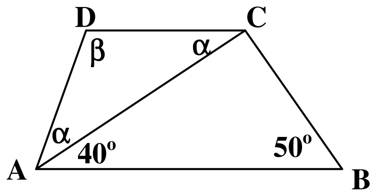
Zad 9. $f(x)=\frac{2x^3}{x^4+1}$
$f\left(-\sqrt{2}\right)=\frac{2\left(-\sqrt{2}\right)^3}{\left(-\sqrt{2}\right)^4+1}=\frac{-2\cdot 2\sqrt{2}}{4+1}=\frac{-4\sqrt{2}}{5}$ **(C)**

Zad 10. $f(x)=-2(x+5)(x-11)$
$x+5=0\quad\vee\quad x-11=0$
$x_1=-5\qquad x_2=11\quad\Longrightarrow\quad p=\frac{-5+11}{2}=\frac{6}{2}=3$ dla x = 3 największa wartość funkcji. Funkcja jest rosnąca dla $x\in(-\infty;\ 3\rangle$ **(A)**

Zad 11. $a_n=6(n-16)\quad a_1=6(1-16)=6\cdot(-15)=-90$
$r=a_{n+1}-a_n=6(n+1-16)-6(n-16)=6n-90-6n+96=6$ ciąg jest arytmetyczny o różnicy r = 6
$a_{10}=6(10-16)=6\cdot(-6)=-36\quad S_{10}=\frac{-90+(-36)}{2}\cdot 10=-126\cdot 5=-630$ **(C)**

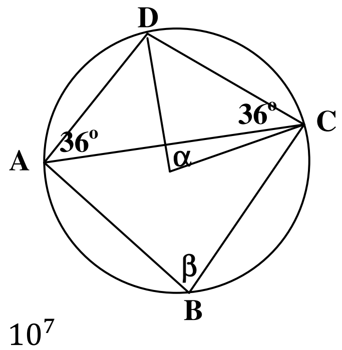
Zad 12. $a_1=72\quad a_4=9\quad\Longrightarrow\quad a_4=a_1\cdot q^3\quad\Longrightarrow\quad 9=72\cdot q^3|:72$
$q^3=\frac{9}{72}=\frac{1}{8}\quad\Longrightarrow\quad q=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$ **(A)**

Zad 13. Jest to trapez dowolny a nie równoramienny w którym |AD| = |CD| oraz trójkąt ABC prostokątny
W każdym trapezie mamy sumy kątów przy ramionach: po 180° tak więc: $40°+\alpha+\beta=\alpha+90°+50°$
$\beta=140°-40°=100°$



(A)

Zad 14. $\alpha=72°$ jako kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany DAC
$\sphericalangle ADC=180°-2\cdot 36°=180°-72°=108°$
$\sphericalangle\beta=180°-108°=72°$ Suma miar kątów przeciwległych w czworokącie wpisanym w okrąg wynosi 180°



(D)

Zad 15. $\frac{5\mathrm{T}}{0{,}5\mathrm{g}}=\frac{5000kg}{0{,}5g}=\frac{5000000g}{0{,}5g}=\frac{50000000}{5}=10000000=10^7$ **(B)**

Zad 16. $P=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 20\cdot\sin 150°=200\cdot\sin 30°=200\cdot\frac{1}{2}=100$ **(A)**

Zad 17. $A=(-3;\ \ 2)$ $\quad B=(1;\ \ 4)$ $\quad a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4-2}{1-(-3)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ – współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty AB $y=ax+b$ jest symetralną odcinka AB więc współczynnik kierunkowy tej prostej $a=-2$ $\quad \left(\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1\right)$ **(C)**

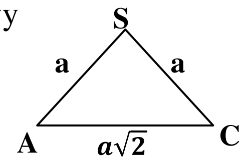
Zad 18. $\begin{cases} y=-ax+2a \\ y=\frac{b}{3}x-2 \end{cases}$ ma nie mieć rozwiązań więc proste mają być równoległe czyli $\frac{b}{3}=-a|\cdot 3$

$b=-3a$ Ten warunek spełnia C i D ale dla $a=-1$ równania stają się identyczne czyli proste nakrywają się. Tak więc $a=1 \quad b=-3$ **(C)**

Zad 19. $\frac{a+54}{2}=2a|\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad a+54=4a \quad \Rightarrow \quad a-4a=-54$

$-3a=-54|:(-3) \quad \Rightarrow \quad a=18$ **(B)**

Zad 20. Przekrój tego ostrosłupa przez wierzchołek i przekątną podstawy wygląda następująco. Widać z rysunku że kąt przy wierzchołku S jest kątem prostym



(D)

Zad 21. W trzykrotnym rzucie monetą mamy 8 wszystkich wyników $2^3=8$ Pytanie jest zdarzenie $A=\{(orr);(ror);(rro);\}$ $\quad P(A)=\frac{3}{8}=0{,}375$ **(B)**

Zad 22.

$\frac{x-1+3x+5x+1+7x}{4}=72 \quad \Rightarrow \quad \frac{16x}{4}=72 \quad \Rightarrow \quad 4x=72|:4$

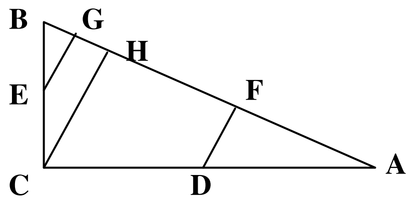
$x=18$ **(D)**

Zad 23. Oba wykresy przedstawiają funkcje malejące więc $a<0\ \ i\ \ m<0 \quad \Rightarrow \quad a\cdot m>0$

I wykres przecina oś OY powyżej zera więc $b>0$ II wykres przecina oś OY poniżej zera więc $n<0 \quad \Rightarrow \quad b\cdot n<0$ **(B)**

Zad 24. $(3x^3-2x)(-3x^2-2)=-9x^5-6x^3+6x^3+4x=-9x^5+4x$ **(A)**

Zad 25. Wszystkie trójkąty ABC; EGB i AFD są podobne.



Poprowadźmy dodatkowo odcinek CH równoległy do EG i DF

Trójkąt CHB jest podobny do EGB w skali 2 czyli jego pole jest $2^2=4$ razy większe od P_{EGB}

Analogicznie $P_{CAH}=4\cdot P_{AFD}=4\cdot 4=16$

$P_{ABC}=P_{CHB}+P_{CAH}=4+16=20$ **(D)**

Zadania otwarte

Zad 26. $\frac{2x+1}{2x}=\frac{2x+1}{x+1} \quad x\neq 0\ \ i\ \ x\neq -1$

$(2x+1)(x+1)=2x(2x+1)$

$2x^2+2x+x+1=4x^2+2x$

$2x^2+3x+1-4x^2-2x=0$

$-2x^2+x+1=0$

$\Delta=1^2-4\cdot(-2)\cdot 1=1+8=9 \quad \sqrt{9}=3$

$x_1=\frac{-1-3}{2\cdot(-2)}=\frac{-4}{-4}=1 \quad x_2=\frac{-1+3}{2\cdot(-2)}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$

Odp: $x=1 \quad \vee \quad x=-\frac{1}{2}$

Zad 27. $y=x+2 \quad y=-3x+b$ Proste mają się przecinać w punkcie leżącym na osi OY więc to jest punkt $C=(0;\ \ 2)$ czyli II prosta ma wzór $y=-3x+2$

Obliczmy punkty przecięcia tych prostych z osią OX (miejsca zerowe)

$x+2=0 \quad x=-2 \quad A=(-2;\ \ 0)$

$=-3x+2=0 \quad -3x=-2|:(-3) \quad x=\frac{2}{3} \quad B=\left(\frac{2}{3};\ \ 0\right)$

Podstawa trójkąta $a=|AB|=2\frac{2}{3}$ wysokość $h=2$ współrzędna y punktu C

$P=\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot 2=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$

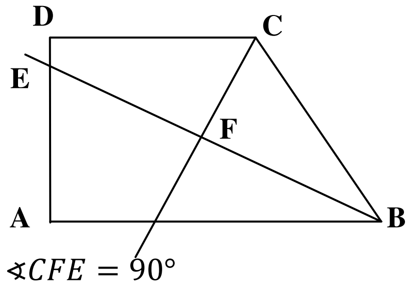
Zad 28. $x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \geq 2(x^3 + y^3)$

$x^4 + y^4 - 2x^3 - 2y^3 + x^2 + y^2 \geq 0$

$x^4 - 2x^3 + x^2 + y^4 - 2y^3 + y^2 \geq 0$

$x^2(x^2 - 2x + 1) + y^2(y^2 - 2y + 1) \geq 0$

$x^2(x-1)^2 + y^2(y-1)^2 \geq 0$ Ta nierówność jest zawsze prawdziwa jako suma kwadratów dowolnych liczb.



Zad 29. Trapez jest prostokątny więc $\sphericalangle ADC = 90°$

Wystarczy wykazać że $\sphericalangle EFC = 90°$

albo że trójkąt BCF prostokątny

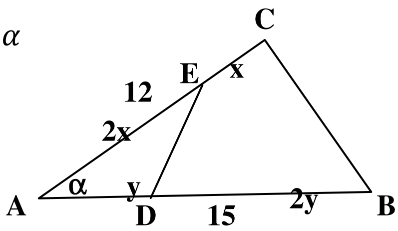
$\sphericalangle DCB + \sphericalangle ABC = 180°$ z założenia że ABCD trapez

$\sphericalangle BCF + \sphericalangle FBC = \frac{1}{2}\sphericalangle DCB + \frac{1}{2}\sphericalangle ABC = 90°$

bo półproste BF i CF to dwusieczne.

Stąd $\sphericalangle CFB = 90°$ jako trzecie w trójkącie BCF. Tak więc $\sphericalangle CFE = 90°$

oraz $\sphericalangle CFE + \sphericalangle EDC = 180°$ co kończy dowód.



Zad 30. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ to z jedynki trygonometrycznej obliczymy $\sin\alpha$

$\sin^2\alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ Obliczymy dalej długości odcinków:

AE i AD $\quad 2x + x = 12 \qquad 3x = 12|:3 \qquad x = 4 \qquad AE = 2 \cdot 4 = 8$

$y + 2y = 15 \qquad 3y = 15|:3 \qquad y = 4 \qquad AD = 5$

Pole trójkąta ABC $\; P = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 15 \cdot \frac{3}{5} = 6 \cdot 9 = 54$

Pole trójkąta ADE $\; P = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 4 \cdot 3 = 12$

Pole czworokąta BCED $P = 54 - 12 = 42$

Zad 31. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2016 \qquad a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{12} = 2016$

Korzystając ze wzoru na sumę ciągu arytmetycznego $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2}n$ mamy:

$S_4 = \frac{2a_1 + (4-1)r}{2}4 = 2016$ oraz dodając do siebie oba podane wzory:

$S_{12} = \frac{2a_1 + (12-1)r}{2}12 = 4032$ Mamy więc układ równań z dwiema niewiadomymi

$\begin{cases} (2a_1 + 3r)2 = 2016 \\ (2a_1 + 11r)6 = 4032 \end{cases}$

$\begin{cases} 4a_1 + 6r = 2016|:4 \\ 12a_1 + 66r = 4032|:6 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 + 1{,}5r = 504 \\ 2a_1 + 11r = 672 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 = 504 - 1{,}5r \\ 2(504 - 1{,}5r) + 11r = 672 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 = 504 - 1{,}5r \\ 1008 - 3r + 11r = 672 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 = 504 - 1{,}5r \\ 8r = 672 - 1008 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 504 - 1{,}5r \\ 8r = -336|:8 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 504 - 1{,}5r \\ r = -42 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 = 504 - 1{,}5 \cdot (-42) \\ r = -42 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 504 + 63 \\ r = -42 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 567 \\ r = -42 \end{cases}$

$a_n = a_1 + (n-1)r$ Aby określić który wyraz jest najmniejszym dodatnim można rozwiązać równanie: $a_1 + (n-1)r = 0$ czyli $567 + (n-1) \cdot (-42) = 0$

$-42n + 42 = -567 \qquad -42n = -567 - 42$

$-42n = -609|(-42) \qquad n = 14{,}5$

Mamy więc dla $n = 14 \qquad a_{14} = 567 + 13 \cdot (-42) = 567 - 546 = 21$

Odp: W tym ciągu $a_1 = 567$; $\; r = -42$ a czternasty wyraz $a_{14} = 21$ jest ostatnim najmniejszym wyrazem dodatnim.

Zad 32. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 8\pi$ wprowadźmy oznaczenia $h = 3x$ $r = 8x$ korzystając z faktu że $\frac{h}{r} = \frac{3}{8}$

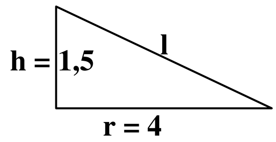
$V = \frac{1}{3}\pi(8x)^2 \cdot 3x = 8\pi$

$\frac{1}{3}\pi 64x^2 \cdot 3x = 8\pi |: \pi$ $64x^3 = 8|: 64$ $x^3 = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$

$x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ $r = 8x = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$ $h = 3x = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1,5$

$l^2 = 4^2 + (1,5)^2$ $l^2 = 16 + 2,25 = 18,25$

$l = \sqrt{18,25} = \sqrt{\frac{73}{4}} = \frac{\sqrt{73}}{2}$



$P_b = \pi r l = \pi \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{73}}{2} = 2\sqrt{73}\pi$

Zad 33. $V = \frac{s}{t}$ $V \cdot t = s$ $t = \frac{s}{V}$ - wzór na czas przelotu przy danej drodze i prędkości

$V_1 = 1,1 \cdot V$ wtorkowa prędkość przelotowa wyrażona za pomocą prędkości zakładanej

$V_2 = 0,9 \cdot V$ czwartkowa prędkość przelotowa wyrażona za pomocą prędkości zakładanej

$t_1 = \frac{s}{V_1} = \frac{s}{1,1V} = \frac{1}{1,1} \cdot \frac{s}{V} = \frac{1}{1,1} \cdot t = \frac{t}{1,1}$ czas przelotu we wtorek

$t_2 = \frac{s}{V_2} = \frac{s}{0,9V} = \frac{1}{0,9} \cdot \frac{s}{V} = \frac{1}{0,9} \cdot t = \frac{t}{0,9}$ czas przelotu w czwartek

Teraz możemy zapisać równanie do rozwiązania: $\frac{t}{0,9} - \frac{t}{1,1} = 12| \cdot 0,9 \cdot 1,1$

$1,1t - 0,9t = 12 \cdot 0,9 \cdot 1,1$

$0,2t = 11,88|: 0,2$ $t = 59,4min$ - standardowy czas przelotu w zwykły dzień

$t_1 = \frac{t}{1,1} = \frac{59,4}{1,1} = 54minuty$ - czas przelotu we wtorek

Odpowiedź: We wtorek czas przelotu samolotu na Austrią wynosił 54 minuty.