Próbna matura przed nową formułą XII 2014r

Zadania zamknięte

Zad 1. $\frac{5}{8} = 0{,}626$ $\quad$ $0{,}625 - 0{,}6 = 0{,}025$ błąd bezwzględny

Błąd względny w procentach: $\frac{0{,}025}{0{,}625} \cdot 100\% = \frac{2{,}5}{0{,}625}\% = 4\%$ **(D)**

Zad 2. $S = (-6;\ -8)$ W symetrii względem OY mamy: Jeżeli $S = (x;\ y)$ to $S_1 = (-x;\ y)$ więc tu $S_1 = (6;\ -8)$. Odległość $|SS_1| = |-6 - 6| = 12$ **(A)**

Zad 3. $(x^3 - 8)(x - 5)(2x + 1) = 0$

$x^3 - 8 = 0$ *lub* $x - 5 = 0$ *lub* $2x + 1 = 0$

$x^3 = 8$ *lub* $x = 5$ *lub* $2x = -1$

$x = \sqrt[3]{8} = 2$ *lub* $x = 5$ *lub* $x = -\frac{1}{2}$ **(C)**

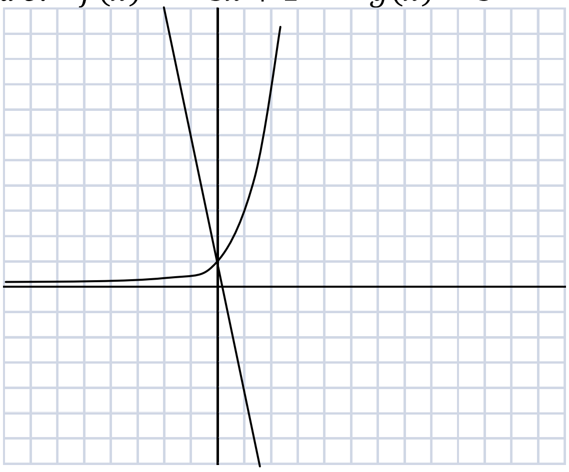
Zad 4. $x -$ cena wyjściowa

I podwyżka o 30% $x + 30\%x = x + 0{,}3x = 1{,}3x -$ po pierwszej podwyżce

II podwyżka o 10% $1{,}3x + 10\% \cdot 1{,}3x = 1{,}3x + 0{,}1 \cdot 1{,}3x = 1{,}3x + 0{,}13x = 1{,}43x = 143\%x$

po II podwyżce mamy 143% pierwotnej ceny czyli wzrost o 43% **(D)**

Zad 5. $f(x) = -5x + 1$ $\quad$ $g(x) = 5^x$



Znając wykresy tych funkcji oczywistym jest że tylko dla $x = 0$ mają punkt wspólny **(C)**

Zad 6. $(3x + 1 + y)^2 = (3x + 1 + y) \cdot (3x + 1 + y) = 9x^2 + 3x + 3xy + 3x + 1 + y + 3xy + y + y^2 = 9x^2 + 6x + 6xy + 2y + y^2 + 1$ **(D)**

Zad 7. $4^{28} + 4^{28} + 4^{28} + 4^{28} = 4 \cdot 4^{28} = 4^{29} = (2^2)^{29} = 2^{58}$

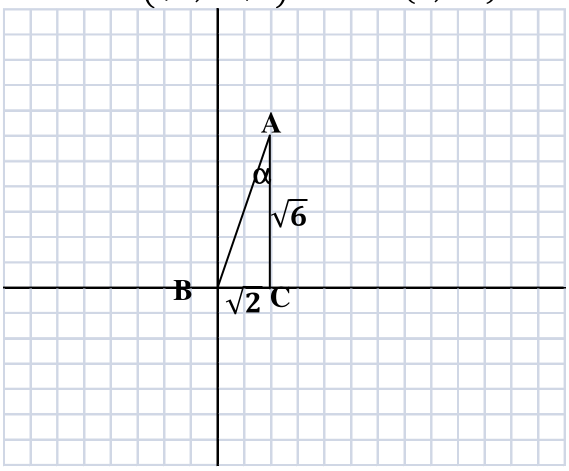
połowa $2^{58} = \frac{2^{58}}{2} = 2^{57}$ **(B)**

Zad 8. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ jest to prosta odpowiadająca funkcji malejącej o współczynniku $a = -\frac{3}{4}$

$y = -\frac{4}{3}$ w tej prostej nie występuje x więc jest równoległa do osi OX

Tak więc są to dwie proste przecinające się w jednym punkcie pod kątem α; $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$ **(C)**

Zad 9. $A = (\sqrt{2};\ \sqrt{6})$ $\quad$ $B = (0;\ 0)$ $\quad$ $C = (\sqrt{2};\ 0)$



$\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\alpha = 30°$ **(A)**

Zad 10.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0	1	4

Widzimy że zbiór wartości $Y = \{1;\ 4;\ 9;\ 6;\ 5;\ 0\}$ idąc dalej w liczby dwucyfrowe końcówki kwadratów będą się powtarzać **(B)**

Zad 11. x – ilość pracowników
y – ilość dni pracy ekipy $25 \cdot 156 = 3900$ - liczba roboczodniówek do wykonania.
Czyli mamy $x \cdot y = 3900$. Jeżeli praca ma być wykonana w 100 dni czyli $y = 100$
$x \cdot 100 = 3900$ $x = \frac{3900}{100} = 39$ Potrzeba 39 pracowników,
$39 - 25 = 14$ – potrzeba dodatkowo 14 pracowników **(A)**

Zad 12. $V = a^3$ – objętość sześcianu
w ostrosłupie mamy w podstawie trójkąt prostokątny o przyprostokątnych ***a*** oraz wysokość $h = a$
$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot a = \frac{1}{6}a^3$ – objętość ostrosłupa
Objętość pozostałej części to $V_1 = V - V_2 = a^3 - \frac{1}{6}a^3 = \frac{5}{6}a^3$ Czyli $V_1 = 5 \cdot V_2$ **(D)**

Zad 13. $A = (p;\ \ q) = (2;\ \ 4)$ – współrzędne wierzchołka
$f(x) = a(x-p) + q$ czyli $f(x) = a(x-2) + 4$ jak widać na wykresie gałęzie są do dołu więc przed nawiasem musi być – (minus) **(C)**

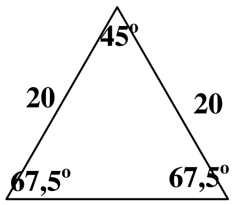
Zad 14. $A = \left(-6 - 2\sqrt{2};\ \ 4 - 2\sqrt{2}\right)$ $B = \left(2 + 4\sqrt{2};\ \ -6\sqrt{2}\right)$ $C = \left(2 + 6\sqrt{2};\ \ 6 - 2\sqrt{2}\right)$
Przekątne równoległoboku przecinając się dzielą się na połowy więc wystarczy obliczyć współrzędne środka odcinka AC.
$x = \frac{-6-2\sqrt{2}+2+6\sqrt{2}}{2} = \frac{-4+4\sqrt{2}}{2} = \frac{2\left(-2+2\sqrt{2}\right)}{2} = -2 + 2\sqrt{2}$ $y = \frac{4-2\sqrt{2}+6-2\sqrt{2}}{2} = \frac{10-4\sqrt{2}}{2} = 5 - 2\sqrt{2}$
$S = \left(-2 + 2\sqrt{2};\ \ 5 - 2\sqrt{2}\right)$ **(D)**

Zad 15. $\sin 150° = \sin(90° + 60°) = \cos 60°$ **(A)**

Zad 16. Zadanie można potraktować jak ciąg arytmetyczny:
$a_1 = 1;$ $r = 0{,}1;$ $a_n = 5{,}9$ $a_n = a_1 + (n-1)r$
$5{,}9 = 1 + (n-1) \cdot 0{,}1$
$5{,}9 = 1 + 0{,}1n - 0{,}1$ $0{,}1n = 5{,}9 - 1 + 0{,}1$ $0{,}1n = 5$ $n = 50$ **(B)**

Zad 17.
$180° - (67{,}5° + 67{,}5°) = 180° - 135° = 45°$

$P = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \cdot \sin 45° = 200 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 100\sqrt{2}$

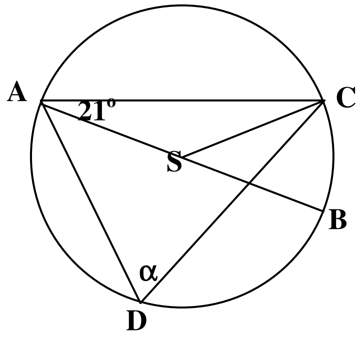


(B)

Zad 18. $\frac{P_1}{P_2} = k^2$ stosunek pól figur podobnych to kwadrat skali podobieństwa.
$\frac{P_1}{P_2} = 2$ $k^2 = 2$ $k = \sqrt{2}$
Stosunek objętości brył podobnych to sześcian skali podobieństwa $\frac{V_1}{V_2} = k^3 = \sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2}$ **(C)**

Zad 19.

Trójkąt ASC równoramienny |AS| = |SC| = r
$\sphericalangle ASC = 180° - 2 \cdot 21° = 180° - 42° = 138°$
$\sphericalangle ASC$ to kąt środkowy
$\sphericalangle ADC$ wpisany oparty na tym samym łuku
$\sphericalangle ADC = \frac{1}{2} \cdot 138° = 69°$



(D)

Zad 20.
średnia arytmetyczna $\frac{3+8+3+11+3+10+3+x}{8} = 6| \cdot 8$
$41 + x = 48$ $x = 48 - 41$ $x = 7$
zbiór po uporządkowaniu: $\{3;\ 3;\ 3;\ 3;\ 7;\ 8;\ 10;\ 11\}$ Mediana to $\frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$ **(A)**

Zad 21. $a_1 = -\sqrt{2};\quad a_2 = 2;\quad a_3 = -2\sqrt{2}\qquad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{-\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = -\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^9 = \left(-\sqrt{2}\right)^{10} = \left[-(2)^{\frac{1}{2}}\right]^{10} = 2^{\frac{1}{2}\cdot 10} = 2^5 = 32$ **(A)**

Zad 22. $a_n = \frac{24-4n}{n}$

$\frac{24-4n}{n} \geq 0 | \cdot n$ nierówność rozwiązujemy dla n dodatnich więc mnożenie przez n nie zmienia znaku nierówności

$24 - 4n \geq 0 \qquad -4n \geq -24 | : (-4) \qquad n \leq 6$

Można by przypuszczać że tych wyrazów jest 6 ale dla $n = 5$ $mamy$: $\frac{24-4\cdot 5}{5} = \frac{24-20}{5} = \frac{4}{5}$ - ułamek dla $n = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6\}$ są to liczby całkowite $\{20;\ 8;\ 4;\ 2;\ 0\}$ **(C)**

Zad 23. Prawdopodobieństwo wyrzucenia konkretnej liczby oczek w jakimkolwiek rzucie jest zawsze $\frac{1}{6}$. Nie ważne czy to jest pierwszy rzut i oczekujemy jedynki, czy może szósty rzut i oczekujemy szóstki, tak więc prawdziwe jest tylko: $p_6 = \frac{1}{6}$ **(B)**

Zad 24. $4^x = 9 \qquad a^c = b \iff \log_a b = c$

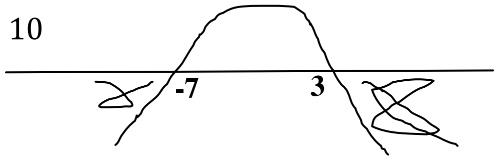
Mamy $\log_4 9 = x$ ale $\log_4 9 = \log_4 3^2 = 2\log_4 3$ **(D)**

<u>Zadania otwarte</u>

Zad 25. $-x^2 - 4x + 21 < 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 21 = 16 + 84 = 100 \qquad \sqrt{100} = 10$

$x_1 = \frac{4-10}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \qquad x_2 = \frac{4+10}{-2} = \frac{14}{-2} = -7$



Odpowiedź: $x \in (-\infty;\ -7) \cup (3;\ +\infty)$

Zad 26. $\frac{2x+4}{x-2} = 2x + 1$

$\frac{2x+4}{x-2} - 2x - 1 = 0$

$\frac{2x+4}{x-2} - (2x + 1) = 0$

$\frac{2x+4}{x-2} - \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} = 0$

$\frac{2x+4}{x-2} - \frac{2x^2-4x+x-2}{x-2} = 0$

$\frac{2x+4-2x^2+4x-x+2}{x-2} = 0$

$\frac{-2x^2+5x+6}{x-2} = 0$ dla $x \neq 2$ mamy:

$-2x^2 + 7x + 2 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4\cdot(-2)\cdot 6 = 25 + 48 = 73 \qquad \sqrt{73}$ – liczba niewymierna, więc i pierwiastki równania będą niewymierne.

Zad 27. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad 0{,}125 = \frac{1}{8}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8} \qquad x = 3$ Czas połowicznego rozpadu musi upłynąć przynajmniej trzykrotnie aby z 1 g izotopu jodu ^{131}I pozostało 0,125 grama tego izotopu. Czas połowicznego rozpadu wynosi 8 dni więc cały czas wynosi $3\cdot 8 = 24$ dni

Odpowiedź: Aby z 1 grama ^{131}I pozostało 0,125grama ^{131}I potrzeba przynajmniej 24 dni.

Zad 28. Jeżeli liczba nie dzieli się przez 3 to ma postać: $x = 3n + 1$ lub $x = 3n + 2 \qquad n \in N$

a) $x = 3n + 1$

$x^2 = (3n + 1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3(3n^2 + 2n) + 1$ Mamy więc wykazane że $9n^2 + 6n$ dzieli się przez 3 i zostaje reszta 1

b) $x = 3n + 2$

$x^2 = (3n + 2)^2 = 9n^2 + 12n + 4 = 9n^2 + 12n + 3 + 1 = 3(3n^2 + 6n + 1) + 1$ Widzimy że $9n^2 + 12n + 3$ dzieli się przez 3 i także zostaje reszty 1 (***co było do wykazania***)

Zad 29. $v = \frac{s}{t}$ wartość prędkości średniej na danym odcinku drogi

Droga z A do C podzielona na 2 równe odcinki po $\frac{1}{2}s$

$v_1 = \frac{\frac{1}{2}s}{t_1} = 40\frac{km}{h}$ - prędkość na I odcinku drogi

$\frac{\frac{1}{2}s}{t_1} = 40\frac{km}{h} \quad \Longrightarrow \quad t_1 \cdot 40\frac{km}{h} = \frac{1}{2}s \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \frac{\frac{1}{2}s}{40\frac{km}{h}} = \frac{s}{80\frac{km}{h}}$

$v_2 = \frac{\frac{1}{2}s}{t_2} = 60\frac{km}{h}$ - prędkość na II odcinku drogi

$\frac{\frac{1}{2}s}{t_2} = 60\frac{km}{h} \quad \Longrightarrow \quad t_2 \cdot 60\frac{km}{h} = \frac{1}{2}s \quad \Longrightarrow \quad t_2 = \frac{\frac{1}{2}s}{60\frac{km}{h}} = \frac{s}{120\frac{km}{h}}$

$t_1 + t_2 = \frac{s}{80\frac{km}{h}} + \frac{s}{120\frac{km}{h}} = \frac{3s}{240\frac{km}{h}} + \frac{2s}{240\frac{km}{h}} = \frac{5s}{240\frac{km}{h}}$

$v = \frac{s}{t} = \frac{s}{\frac{5s}{240\frac{km}{h}}} = \frac{s \cdot 240\frac{km}{h}}{5s} = \frac{240}{5}\frac{km}{h} = 48\frac{km}{h}$

Odpowiedź: średnia prędkość na całej trasie wynosiła $48\frac{km}{h}$

Zad 30. Mamy 16 miejsc w teatrze. Obliczamy ilość możliwości rozlokowania 2 osób na tych miejscach. Można to obliczyć tak: I osoba ma do wyboru 16 miejsc. Po zajęciu przez nią konkretnego miejsca II osoba ma do wyboru 15 miejsc. Tak więc ilość sposobów rozlokowania dwóch osób na tych miejscach to $\bar{\bar{\Omega}} = 16 \cdot 15 = 240$. Można to też potraktować jako tablicę:

$\{(1;\ 2)(1;\ 3)\cdots(1;\ 16)(2;\ 1)(2;\ 3)\cdots(2;\ 16)\cdots\cdots(15;\ \ 1)(15;\ \ 16)\}$

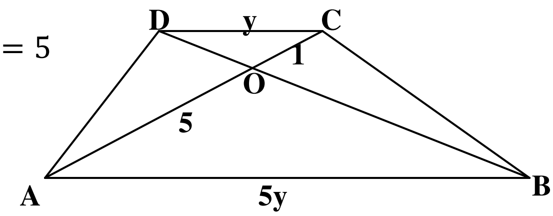
Zdarzenie A – osoby siedzą obok siebie:

$$A = \left\{ \begin{matrix} (1;2)(2;1)(2;3)(3;2)(3;4)(4;3)(4;5)(5;4)(5;6)(6;5)(6;7)(7;6)(7;\ 8)(8;7)(8;9)(9;8) \\ (9;10)(10;9)(11;12)(12;11)(12;13)(13;12)(13;14)(14;13)(14;15)(15;14)(15;16)(16;15) \end{matrix} \right\}$$

$\bar{\bar{A}} = 28 \qquad P(A) = \frac{28}{240} = \frac{7}{60}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo że dwie konkretne osoby siedzą obok siebie wynosi $\frac{7}{60}$

Zad 31.



$P_{AOD} = 10$ to też $P_{BOC} = 10$ bo $P_{DCA} = P_{DCB}$

Trójkąty DCO i ABO są podobne w skali $k = 5{:}1 = 5$

podobieństwo wynika z cechy (kkk)

tak więc jeżeli $|DC| = y$ to $|AB| = 5y$

$\frac{P_{ABO}}{P_{DCO}} = k^2 = 25$

Przyjmijmy $P_{DCO} = x$ to $P_{ABO} = 25x$

$P_{DCA} = P_{AOD} + P_{DCO} = 10 + x$

można też napisać $P_{DCA} = \frac{1}{2}y \cdot h$

$P_{ABC} = P_{BCO} + P_{AOB} = 10 + 25x$

można też napisać $P_{ABC} = \frac{1}{2}5y \cdot h = 5P_{DCA}$

$5(10 + x) = 10 + 25x$

$50 + 5x = 10 + 25x$

$5x - 25x = 10 - 50$

$-20x = -40 \qquad x = \frac{-40}{-20} \qquad x = 2$

$P_{ABCD} = 10 + 10 + 2 + 25 \cdot 2 = 20 + 2 + 50 = 72$

Odpowiedź: Pole trapezu ABCD wynosi 72

Zad 32. $A = (3;\ \ 3) \quad B = (9;\ \ 1) \quad M = (1;\ \ 6)$ – środek odcinka AC $\ C = (x;\ \ y)$

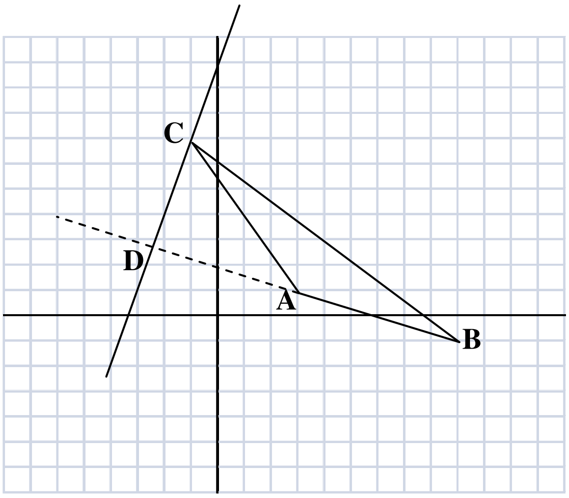
$1 = \frac{3+x}{2} | \cdot 2 \qquad 6 = \frac{3+y}{2} | \cdot 2$

$2 = 3 + x \qquad 12 = 3 + y$

$x = -1 \qquad y = 9 \qquad C = (-1;\ \ 9)$

Prosta AB $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-3}{9-3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \qquad y = -\frac{1}{3}x + b \qquad A = (3;\ \ 3)$

$3 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + b \qquad 3 = -1 + b \qquad b = 4 \qquad y = -\frac{1}{3}x + 4$ - równanie prostej AB



Wysokość poprowadzona z punktu C jest prostopadła do AB $y = -\frac{1}{3}x + 4$ $a_2 = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3$

Równanie prostej CD na której leży szukana wysokość $y = 3x + b$ $C = (-1;\quad 9)$

$9 = 3 \cdot (-1) + b$ $9 = -3 + b$ $b = 12$

$y = 3x + 12$ - prosta CD na której leży wysokość

Obliczamy współrzędne punktu D czyli punktu przecięcia wysokości z podstawą AB.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 4 \\ y = 3x + 12 \end{cases}$$

$-\frac{1}{3}x + 4 = 3x + 12$

$-\frac{1}{3}x - 3x = 12 - 4$

$-\frac{10}{3}x = 8$ $x = \frac{8}{-\frac{10}{3}} = 8 \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) = -\frac{24}{10} = -2{,}4$

$y = 3x + 12 = 3 \cdot (-2{,}4) + 12 = -7{,}2 + 12 = 4{,}8$ $D = (-2{,}4;\quad 4{,}8)$

Zad 33.

$h = d - 22 = 2r - 22$

$h^2 + r^2 = l^2$

$(2r - 22)^2 + r^2 = 17^2$

$4r^2 - 88r + 484 + r^2 = 289$

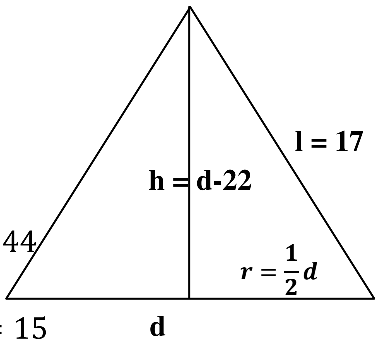
$5r^2 - 88r + 484 - 289 = 0$

$5r^2 - 88r + 195 = 0$

$\Delta = (-88)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 195 = 7744 - 3900 = 3844$

$\sqrt{3844} = 62$

$r_1 = \frac{88-62}{2 \cdot 5} = \frac{26}{10} = 2{,}6$ $r_2 = \frac{88+62}{2 \cdot 5} = \frac{150}{10} = 15$



dla $r_1 = 2{,}6$ mamy $h = 2 \cdot 2{,}6 - 22 = 5{,}2 - 22 = -16{,}8$ nie spełnia warunków zadania bo wysokość nie może być liczbą ujemną

dla $r_2 = 15$ mamy $h = 2 \cdot 15 - 22 = 30 - 22 = 8$

$P_{pc} = \pi r^2 + \pi r l = \pi 15^2 + \pi \cdot 15 \cdot 17 = 225\pi + 255\pi = 480\pi$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 15^2 \cdot 8 = \frac{1}{3} \cdot 225 \cdot 8\pi = 75 \cdot 8\pi = 600\pi$

Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej stożka wynosi 480π a objętość 600π