Maj 2016r poziom rozszerzony

Zadania otwarte

Zad 1. $\left(2\sqrt{3}x+4y\right)^3=\left(2\sqrt{3}\right)^3+3\left(2\sqrt{3}x\right)^2\cdot 4y+3\cdot 2\sqrt{3}x\cdot(4y)^2+(4y)^3$

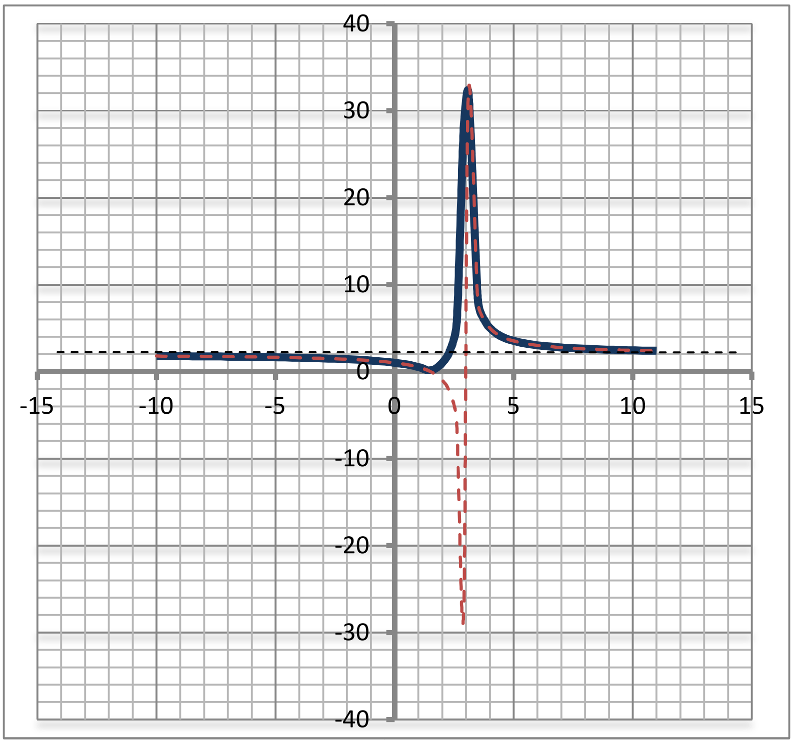
tak więc $3\cdot 2\sqrt{3}x\cdot(4y)^2=6\sqrt{3}x\cdot 16y^2=96\sqrt{3}xy^2$ **(C)**

Zad 2. $6x^3+3x^2-5x+p$ podzielny przez $x-1$ Tak więc dla $x=1$ wartość wielomianu ma być równa 0 $6\cdot 1^3+3\cdot 1^2-5\cdot 1+p=0$

$6+3-5+p=0$

$4+p=0 \quad \Longrightarrow \quad p=-4$ **(D)**

Zad 3.



Z wykresu można zauważyć że po jednym rozwiązaniu jest tylko dla p = 0 lub p = 2 **(B)**

Zad 4. $f(x)=\frac{3x-1}{x^2+4}$

$f'(x)=\frac{3\left(x^2+4\right)-2x(3x-1)}{(x^2+4)^2}=\frac{3x^2+12-6x^2+2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-3x^2+2x+12}{(x^2+4)^2}$ **(A)**

Zad 5. $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(pn^2+4n\right)^3}{5n^6-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{p^3n^6+\cdots}{5n^6-4}=-\frac{8}{5}$ Dalsza część rozwinięcia licznika nie ma wpływu na granicę więc mamy że $p^3=-8 \qquad \Longrightarrow \qquad p=-2$ **(D)**

Zad 6. $\bar{\bar{A}}=7400$ – osoby popierające budowę

$\bar{\bar{B}}=3000$ – mężczyźni

$\overline{\overline{A\cap B}}=2260$ – mężczyźni popierający budowę

$\bar{\bar{\Omega}}=10000$

$P(B)=\frac{3000}{10000}=\frac{3}{10}$ prawdopodobieństwo że wybrana osoba jest mężczyzną.

$P(A\cap B)=\frac{2260}{10000}=\frac{226}{1000}$

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{226}{1000}}{\frac{3}{10}}=\frac{226\cdot 10}{1000\cdot 3}=\frac{226}{300}=0{,}7533\cdots$

Odpowiedź w kratki trzeba wpisać cyfry 753.

Zad 7. $a_n=\left(\frac{1}{2x-371}\right)^n \quad a_1=\frac{1}{2x-371} \quad a_2=\left(\frac{1}{2x-371}\right)^2 \quad q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{\left(\frac{1}{2x-371}\right)^2}{\frac{1}{2x-371}}=\frac{1}{2x-371}$ W zadaniu mamy dodatkowe ułatwienie że wyrazy ciągu są dodatnie czyli $q>0$ więc wystarczy założyć że $q<1$ aby szereg geometryczny był zbieżny $\frac{1}{2x-371}<1$

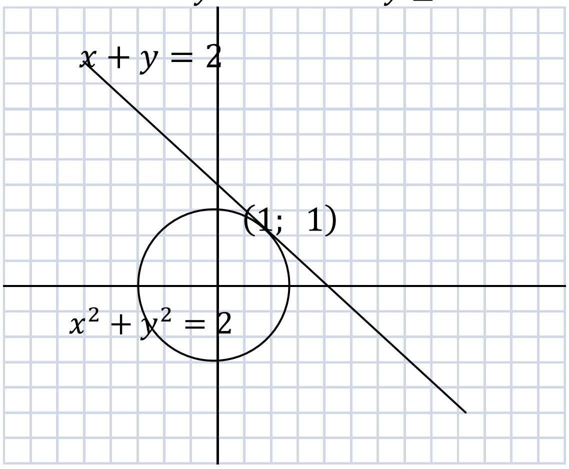
$1<2x-371$

$-2x<-371-1$

$-2x<-372|:(-2)$

$x > 186$
Odpowiedź $x = 187$ jako najmniejsza z liczb spełniających nierówność

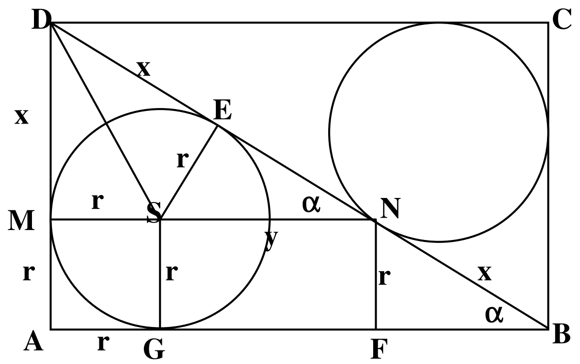
Zad 8. Jeżeli $x^2 + y^2 = 2$ to $x + y \leq 2$



Korzystając ze wzoru na równanie okręgu $x^2 + y^2 = r^2$, równanie $x^2 + y^2 = 2$ opisuje okrąg o promieniu $r = \sqrt{2}$ i środku w punkcie $(0;\ \ 0)$. Prosta o równaniu $x + y = 2$ jest styczna do tego okręgu w punkcie $(1;\ \ 1)$ Aby to potwierdzić rozwiążmy układ równań

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - x \end{cases}$
$x^2 + (2 - x)^2 = 2$
$x^2 + 4 - 4x + x^2 = 2$
$2x^2 - 4x + 4 - 2 = 0$
$2x^2 - 4x + 2 = 0 | : 2$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$(x - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1$
Otrzymaliśmy że dla $(1;\ \ 1)$ Jeżeli $x^2 + y^2 = 2$ to $x + y = 2$
Pozostała część okręgu leży po jednej stronie prostej $x + y = 2$
Należy jeszcze rozstrzygnąć po której stronie prostej $x + y = 2$ leży okrąg $x^2 + y^2 = 2$ Weźmy punkt $(0;\ \ 0)$ - środek okręgu. Spełnia on nierówność $x + y \leq 2$ bo $0 + 0 < 2$ Tak więc cały okrąg musi spełniać tą nierówność i leżeć po tej same stronie prostej $x + y = 2$

Zad 9.



Udowodnić że: |MN| = |AD| czyli r + y = r + x Lub prościej udowodnić że x = y
Odcinki MD = DE = x – odcinki styczne do okręgu
DE = BN = x – trójkąty ADB i BCD i wpisane w nich koła są przystające
Trójkąty BNF i NES są przystające bo są prostokątne SE = r – prostopadły do stycznej BD jak również NF = r – prostopadły do AB jako równoległy do SG. Trójkąty te mają też wspólny kąt ostry α gdyż odcinki AB i MN są równoległe. Tak więc BN = x (przeciwprostokątne) w trójkącie BFN równa się SN = y (przeciwprostokątne) w trójkącie NSE. x = y czyli x + r = y + r MN = AC

Zad 10. $f(x) = x - 2 \quad g(x) = 5 - ax$ jeżeli funkcje mają się przecinać to $f(x) = g(x)$ czyli
$x - 2 = 5 - ax$
$x + ax = 5 + 2$
$x(1 + a) = 7$

$x = \frac{7}{1+a}$ $y = x - 2$ $y = \frac{7}{1+a} - 2 = \frac{7}{1+a} - \frac{2(1+a)}{1+a} = \frac{7-2-2a}{1+a} = \frac{5-2a}{1+a}$

$\left(\frac{7}{1+a};\ \frac{5-2a}{1+a}\right)$ - współrzędne punktu przecięcia wykresów funkcji.

Teraz trzeba ustalić dla jakich ***a*** te współrzędne będą dodatnie.

$\frac{7}{1+a} > 0$ oczywiście $7 > 0$ więc $1 + a > 0 \quad \Rightarrow \quad a > -1$

$\frac{5-2a}{1+a} > 0$ Już mamy że $a > -1$ więc mianownik jest dodatni. Wystarczy więc rozwiązać

$5 - 2a > 0$

$-2a > -5|:(-2)$

$a < \frac{5}{2}$ Biorąc część wspólną obu warunków otrzymujemy $a \in \left(-1;\ \frac{5}{2}\right)$

Zad 11. $\frac{2\cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x} < 0$ dla $x \in \langle 0;\ 2\pi\rangle$

$\cos^2 x$ jako kwadrat jest liczbą nieujemną trzeba ustalić tylko kiedy wynosi zero i te ***x*** wykluczyć ze zbioru rozwiązań:

$\cos^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

Tak więc w przedziale dla $x \in \langle 0;\ 2\pi\rangle$ to będzie $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{3\pi}{2}$

$2\cos x - \sqrt{3} < 0$

$2\cos x < \sqrt{3}|:2$

$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale dla $x \in \langle 0;\ 2\pi\rangle$ mamy rozwiązanie $x \in \left(\frac{\pi}{6};\ \frac{11}{6}\pi\right)$

Odpowiedź $x \in \left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2};\ \frac{11}{6}\pi\right)$

Zad 12. $f(x) = x^2 + 2(m+1)x + 6m + 1$ mamy różne $x_1;\ x_2$ takie że $|x_1 - x_2| < 3$

1) $\Delta = (2m+2)^2 - 4(6m+1) > 0$ $\quad \Delta > 0$ aby istniały dwa różne pierwiastki

$4m^2 + 8m + 4 - 24m - 4 > 0$

$4m^2 - 16m > 0|:4$

$m^2 - 4m > 0$

$m(m-4) > 0$

Pierwiastki $m_1 = 0 \quad \vee \quad m_2 = 4 \quad m \in (-\infty;\ 0) \cup (4;\ +\infty)$

2) Pierwiastki mają być tego samego znaku czyli $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$

$\frac{6m+1}{1} > 0 \quad \Rightarrow \quad 6m + 1 > 0$

$6m > -1$

$m > -\frac{1}{6}$ czyli $m \in \left(-\frac{1}{6};\ +\infty\right)$

3) Pierwiastki spełniają warunek $|x_1 - x_2| < 3$ Obie strony są dodatnie więc podniesienie do kwadratu nie zmienia nierówności

$(x_1 - x_2)^2 < 9$

${x_1}^2 - 2x_1x_2 + {x_2}^2 < 9$

${x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_1x_2 < 9$

[korzystając faktu że $(x_1 + x_2)^2 = {x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_2}^2$ to ${x_1}^2 + {x_2}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$]

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 < 9$

$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 < 9$

Korzystając ze wzorów Viete'a $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2m+2}{1} = -2m - 2$ oraz $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 6m + 1$

$(-2m-2)^2 - 4(6m+1) < 9$

$4m^2 + 8m + 4 - 24m - 4 < 9$

$4m^2 - 16m - 9 < 0$

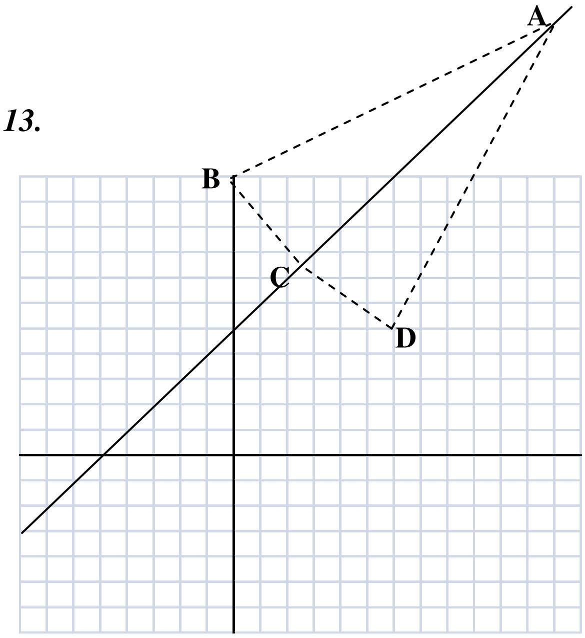
$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9) = 256 + 144 = 400 \qquad \sqrt{400} = 20$

$m_1 = \frac{16-20}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} = -0{,}5 \qquad m_2 = \frac{16+20}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = 4{,}5$

$m \in (-0{,}5;\ 4{,}5)$

Odpowiedź: Część wspólna **1; 2; 3** to: $x \in \left(-\frac{1}{6};\ 0\right) \cup (4;\ 4{,}5)$

Zad 13.



$A=(30;\quad 32)\quad B=(0;\quad 8)$. Czworokąt ABCD wpisany w koło. Prosta $x-y+2=0$ jedyna oś symetrii czworokąta zawierająca punkty A i C

$x-y+2=0$ czyli $y=x+2$

Jeżeli jest to oś symetrii to punkt D leży symetrycznie do punktu B względem niej. Trzeba wyznaczyć prostopadłą do niej przechodzącą przez B. Mamy $y=x+2\quad a_1=1$ dla prostopadłej $a_2=-1$ Prosta prostopadła przechodząca przez B ma postać $y=-x+b$ oraz $B=(0;\quad 8)$ mamy więc $8=-1\cdot 0+b \quad\Longrightarrow\quad b=8$

$y=-x+8$ prosta na której leżą punkty B oraz D

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} y=x+2 \\ y=-x+8 \end{cases}$ aby wyznaczyć środek odcinka BD

$x+2=-x+8$

$2x=6 \quad\Longrightarrow\quad x=3 \quad\Longrightarrow\quad y=x+2 \quad\Longrightarrow\quad y=5 \quad S=(3;\quad 5)$

teraz korzystając ze wzoru na środek odcinka mamy $\frac{0+x}{2}=3 \quad\Longrightarrow\quad x=6$

$\frac{8+y}{2}=5 \quad\Longrightarrow\quad 8+y=10 \quad\Longrightarrow\quad y=10-8 \quad\Longrightarrow\quad y=2$

$D=(6;\quad 2)$

Czworokąt ABCD można wpisać w koło więc suma kątów przeciwległych wynosi 180°. Prosta AC jest osią symetrii więc kąty przy wierzchołkach B i D muszą być równe i po 90°. Mamy więc że proste AD i DC są prostopadłe.

Wyznaczmy współczynnik kierunkowy prostej AD $A=(30;\quad 32)\quad D=(6;\quad 2)$

$a=\frac{32-2}{30-6}=\frac{30}{24}=\frac{5}{4}$

Prosta CD ma jako do niej prostopadła ma współczynnik kierunkowy $a=-\frac{4}{5}$ więc ma postać $y=-\frac{4}{5}x+b$ i przechodzi przez $D=(6;\quad 2)$

$2=-\frac{4}{5}\cdot 6+b$

$2=-\frac{24}{5}+b \Longrightarrow b=2+\frac{24}{5} \Longrightarrow b=\frac{34}{5}=6{,}8$ Prosta CD $y=-\frac{4}{5}x+\frac{34}{5}$

Aby wyznaczyć współrzędne punktu C trzeba rozwiązać układ równań

$\begin{cases} y=x+2 \\ y=-\frac{4}{5}x+\frac{34}{5} \end{cases}$

$x+2=-\frac{4}{5}x+\frac{34}{5}$

$x+\frac{4}{5}x=\frac{34}{5}-2$

$\frac{9}{5}x=\frac{24}{5} \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{24}{5}\cdot\frac{5}{9} \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{24}{9} \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{8}{3}$

$y=x+2 \quad\Longrightarrow\quad y=\frac{8}{3}+2 \quad\Longrightarrow\quad y=\frac{14}{3}$

Punkt C ma współrzędne $C=\left(\frac{8}{3};\quad \frac{14}{3}\right)$

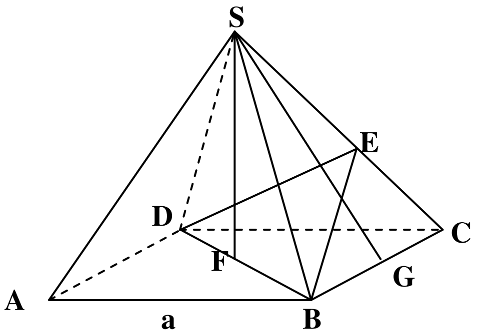
Zad 14. Liczba dziesięciocyfrowa. Cyfry to 1; 2; 3. Liczbę 10 cyfrową wyobraźmy sobie jako 10 pól do wypełnienia.

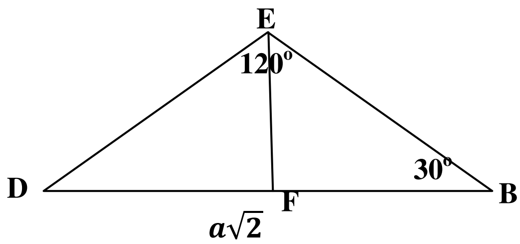
1) Zajmiemy się rozmieszczeniem trzech jedynek. Jedynki te są oczywiście nierozróżnialne (inna by była sprawa gdyby były różnokolorowe) Rozmieszczenie tych trzech jedynek w trzech z 10 miejsc tej liczby to tak samo jak wylosowanie grupy 3 osób z 10 osobowego zbioru. Mamy więc kombinację $\binom{3}{10} = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{4\cdot 3\cdot 10}{1} = 120$

2) W pozostałych 7 miejscach rozmieszczamy dwójki bądź trójki. Jest to zadanie równoważne 7 rzutom monety. Innymi słowy jest to wariacja z powtórzeniami zbioru dwuelementowego $\{2;\ \ 3\}$ w wyniku której otrzymujemy zbiory 7 elementowe. Mamy więc liczbę takich wariacji $2^7 = 128$

Odpowiedź: $\bar{\bar{A}} = 120 \cdot 128 = 15360$

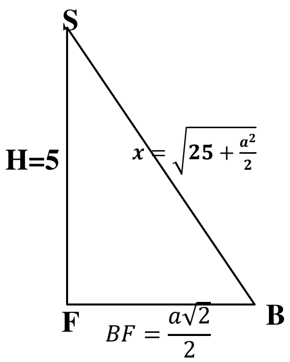
Zad 15.

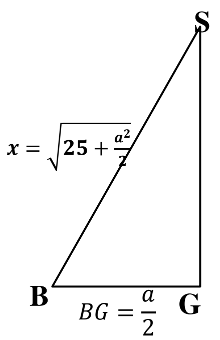


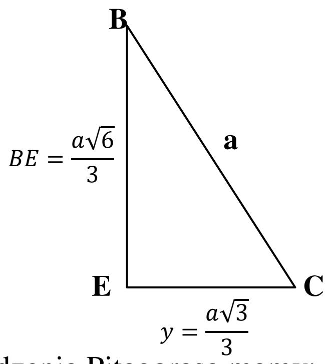


Krawędź podstawy |AB| = a Przekątna podstawy BD = $a\sqrt{2}$ tak więc $BF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\cos 30° = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{BE} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{BE} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{3}\cdot BE = a\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad BE = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad BE = \frac{a\sqrt{6}}{3}$







Z trójkąta FBS wyznaczamy wzór na krawędź boczną SB. Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$5^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = x^2$

$x^2 = 25 + \frac{2a^2}{4} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 25 + \frac{a^2}{2}$

SB = x = $\sqrt{25 + \frac{a^2}{2}}$

Teraz zauważamy że trójkąty SGB lub SGC oraz BEC są podobne. Są to trójkąty prostokątne oraz mają jeden kąt ostry wspólny np. przy wierzchołku C taki sam jak przy wierzchołku B – kąt krawędzi bocznej z krawędzią podstawy.

Przed zastosowaniem podobieństwa tych trójkątów wyliczymy z Twierdzenia Pitagorasa wzór na odcinek EC $y^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = a^2$

$y^2 = a^2 - \frac{6a^2}{9} \quad \Longrightarrow \quad y^2 = a^2 - \frac{2a^2}{3} \quad \Longrightarrow \quad y^2 = \frac{a^2}{3}$

$EC = y = a\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Z podobieństwa tych trójkątów mamy:

$\frac{SB}{BG} = \frac{BC}{CE}$ czyli $\frac{\sqrt{25+\frac{a^2}{2}}}{\frac{a}{2}} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}$

$a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{25 + \frac{a^2}{2}}$

$\frac{a^2}{2} = \sqrt{\frac{3a^2}{9}\left(25 + \frac{a^2}{2}\right)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a^2}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{3}\left(25 + \frac{a^2}{2}\right)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a^2}{2} = \sqrt{\frac{25a^2}{3} + \frac{a^4}{6}}$

po podniesieniu do kwadratu mamy $\frac{a^4}{4} = \frac{25a^2}{3} + \frac{a^4}{6}$ mnożąc przez 12 otrzymujemy

$3a^4 = 100a^2 + 2a^4 \quad \Longrightarrow \quad 3a^4 - 2a^4 = 100a^2 \quad \Longrightarrow \quad a^4 = 100a^2$

można to podzielić przez a^2 i otrzymamy

$a^2 = 100 \quad \Longrightarrow \quad a = \sqrt{100} = 10$

$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 5 = \frac{500}{3}$

Odpowiedź Objętość ostrosłupa wynosi $\frac{500}{3}$

Zad 16. $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ $A = (-2;\ \ 0)$ $B = (2;\ \ 0)$ $C = \left(x;\ \ 2 - \frac{1}{2}x^2\right)$

$P = \frac{1}{2}(a + b)h$ - pole trapezu

$a = 2 - (-2) = 4$ - podstawa dolna trapezu

$b = x - (-x) = 2x$ - podstawa górna trapezu

$h = y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ - wysokość trapezu

$P(x) = \frac{1}{2}(4 + 2x)\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)$ $x \in (0;\ \ 2)$ patrząc na rysunek widzimy że tylko takie x daje pole większe od zera

$P(x) = (2 + x)\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right) = 4 - x^2 + 2x - \frac{1}{2}x^3$

$P(x) = -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 2x + 4$ Pole trapezu jako funkcja zmiennej x

$P'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 2x + 2$

$-\frac{3}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$ Badamy dla jakiego x pole przyjmie wartość ekstremalną

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 2 = 4 + 12 = 16 \qquad \sqrt{16} = 4$

$x_1 = \frac{2-4}{-3} = \frac{2}{3} \qquad \vee \qquad x_2 = \frac{2+4}{-3} = \frac{6}{-3} = -2 \qquad x_2 \notin D$

dla $x < \frac{2}{3}$ czyli dla $x \in \left(0;\ \frac{2}{3}\right)$ mamy $P'(x) > 0$ np. $P'(0) = 2$

dla $x > \frac{2}{3}$ czyli dla $x \in \left(\frac{2}{3};\ \ 2\right)$ mamy $P'(x) < 0$ np. $P'(1) = -\frac{3}{2}$

Jest to więc maksimum. Obliczymy współrzędne punktu C

$x = \frac{2}{3} \quad y = 2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = 2 - \frac{2}{9} = \frac{16}{9}$

Odpowiedź: Punkt C ma współrzędne $C = \left(\frac{2}{3};\ \ \frac{16}{9}\right)$