Rozwiązania maj 2016r.
Zadania zamknięte

Zad 1. $\frac{a^{-2,6}}{a^{1,3}} = a^{-2,6-1,3} = a^{-3,9}$ **(A)**

Zad 2. $\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2} = \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}) = \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^3 = 3$ **(D)**

Zad 3. $b = 0{,}48a$; $b = 0{,}32c \Rightarrow c = \frac{1}{0{,}32}b = \frac{1}{0{,}32}\cdot 0{,}48a = \frac{0{,}48}{0{,}32}a = 1{,}5a$ **(A)**

Zad 4. $(2\sqrt{2} - a)^2 = 17 - 12\sqrt{2}$

$4\cdot 2 - 2\cdot 2\sqrt{2}a + a^2 = 17 - 12\sqrt{2}$

$8 - 4\sqrt{2}a + a^2 = 17 - 12\sqrt{2}$ łatwo zauważyć że $a = 3$ spełnia to równanie $3^2 + 8 = 9 + 8 = 17$ oraz $4\sqrt{2}\cdot 3 = 12\sqrt{2}$ **(D)**

Zad 5. $-x^5 + x^3 - x < -2$ Widać od razu że odpowiedź nie może być liczbą ujemną $-x^5$ oraz $-x$ da wartość dodatnią, dla $x = 1$ otrzymamy $-1 + 1 - 1 = -1 \nless -2$ pozostaje $x = 2$ **(C)**

Zad 6. Należy rozwiązać układ równań $\begin{cases} 2x - 3y = 4 | \cdot(-2) \\ 5x - 6y = 7 \end{cases}$

$\begin{cases} -4x + 6y = -8 \\ 5x - 6y = 7 \end{cases}$ teraz dodając równania mamy

$-4x + 5x + 6y - 6y = -8 + 7$

$x = -1$ to wstawiając do pierwszego równania mamy

$2\cdot(-1) - 3y = 4$

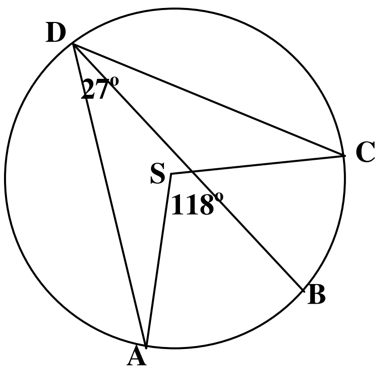
$-2 - 3y = 4$

$-3y = 4 + 2$

$-3y = 6$

$y = -2$ otrzymujemy punkt $P = (-1;\ -2)$ **(C)**

Zad 7.



$\sphericalangle ASC$ środkowy, a $\sphericalangle ADC$ wpisany oparty na tym samym łuku $\frac{1}{2}\cdot 118° = 59°$ tak więc $\sphericalangle BDC = 59° - 27° = 32°$ **(D)**

Zad 8. $f(x) = \frac{3}{4}x + 6$ Miejsce zerowe $\boldsymbol{x}$ spełnia równanie $f(x) = 0$

$\frac{3}{4}x + 6 = 0$

$\frac{3}{4}x = -6 \quad\Rightarrow\quad x = (-6)\cdot\frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{-24}{3} \quad\Rightarrow\quad x = -8$ **(D)**

Zad 9. $\frac{3x-1}{x+5} = 3$

$\frac{3x-1}{x+5} - 3 = 0$

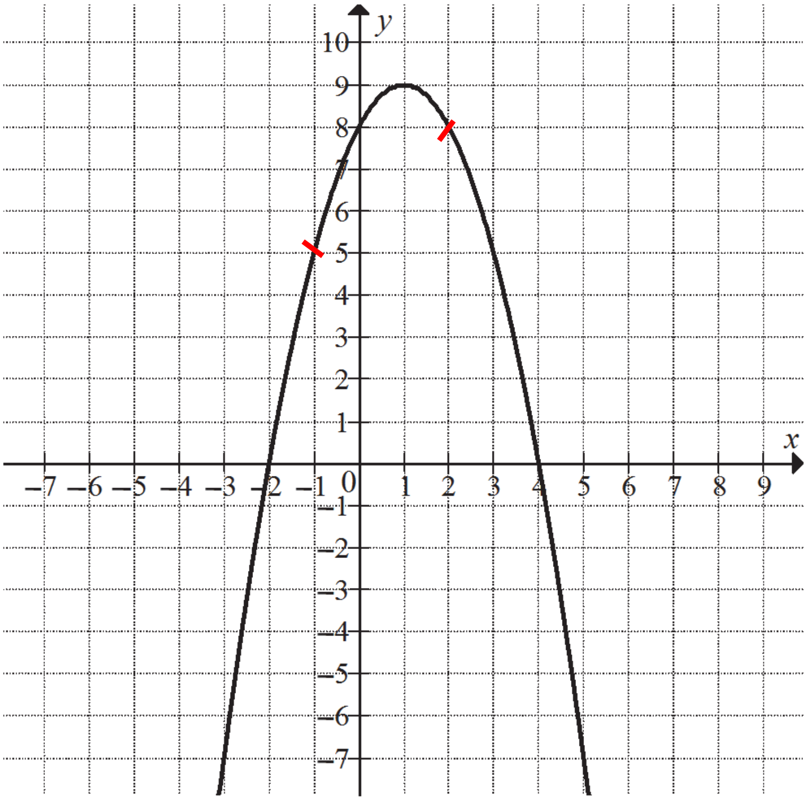
$\frac{3x-1}{x+5} - \frac{3(x+5)}{x+5} = 0$

$\frac{3x-1-(3x+15)}{x+5} = 0$

$\frac{3x-1-3x-15}{x+5} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{-16}{x+5} = 0 \quad\Rightarrow\quad -16 = 0$ brak rozwiązan **(A)**

Zad 10. Aby z wykresu odczytać zbiór wartości należy zauważyć jaki przedział na osi OY zajmuje wykres. Widać wyraźnie że jest to $(-\infty;\ 9\rangle$ **(D)**

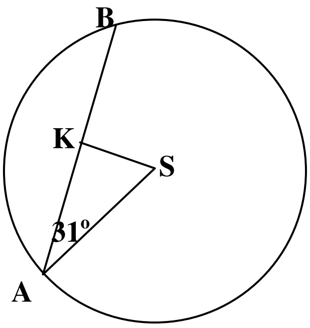
Zad 11. $f(-1) = 5 \qquad f(2) = 8$ najmniejsza wartość dla $x = -1; \quad y = 5$ **(B)**



Zad 12. $f(x) = \frac{2x^3}{x^6+1} \quad x = -\sqrt[3]{3}$

$$f\left(-\sqrt[3]{3}\right) = \frac{2\left(-\sqrt[3]{3}\right)^3}{\left(-\sqrt[3]{3}\right)^6+1} = \frac{2(-3)}{\left(\left(-\sqrt[3]{3}\right)^3\right)^2+1} = \frac{-6}{3^2+1} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$$ **(B)**

Zad 13.



Z tablic $\sin 31° = 0{,}515$

$\sin 31° = \frac{KS}{SA} \quad \Longrightarrow \quad KS = \sin 31° \cdot SA = 10 \cdot 0{,}515 = 5{,}15 = \frac{10{,}3}{2}$ **(A)**

Zad 14. $a_{14} = a_1 + 13r = 8 \qquad\qquad a_7 = a_1 + 6r = a_{14} - 7r$

$a_7 = 8 - 7 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 8 + \frac{21}{2} = 8 + 10\frac{1}{2} = 18\frac{1}{2} = \frac{37}{2}$ **(A)**

Zad 15. Ciąg $(x; \quad 2x+3; \quad 4x+3)$ geometryczny, czyli $\frac{2x+3}{x} = \frac{4x+3}{2x+3}$

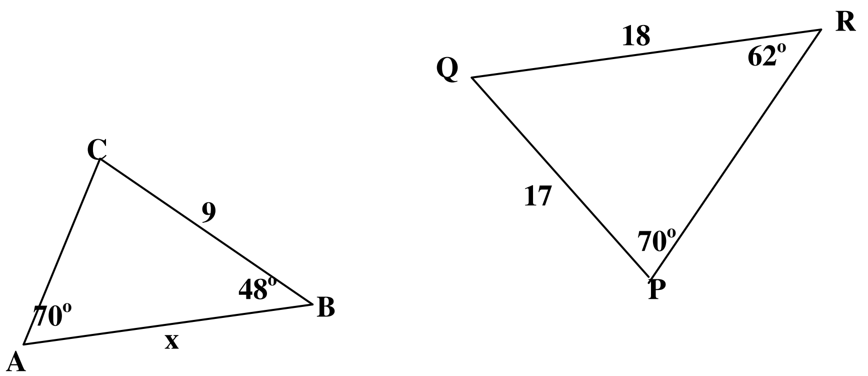
$(2x+3)(2x+3) = x(4x+3)$

$4x^2 + 6x + 6x + 9 = 4x^2 + 3x$

$4x^2 - 4x^2 + 12x - 3x = -9$

$9x = -9 \quad \Longrightarrow \quad x = -1$ **(D)**

Zad 16.



Trójkąty są podobne i wierzchołkowi B odpowiada wierzchołek Q, czyli odcinkowi AB odcinek PQ oraz odcinkowi BC odcinek RQ. Można zapisać proporcję: $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ czyli $\frac{x}{17} = \frac{9}{18}$

$18x = 9 \cdot 17$

$18x = 153 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{153}{18} \quad \Rightarrow \quad x = 8,5$ **(B)**

Zad 17. $\tan\alpha = \frac{2}{3}$ czyli $\frac{\sin\propto}{\cos\propto} = \frac{2}{3}$ oraz mamy jedynkę trygonometryczną $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\begin{cases} \frac{\sin\propto}{\cos\propto} = \frac{2}{3} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\sin\propto = 2\cos\propto \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\sin\propto = \cos\propto \\ \sin^2\alpha + \left(\frac{3}{2}\sin\alpha\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$\sin^2\alpha + \frac{9}{4}\sin^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{13}{4}\sin^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = \frac{4}{13}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ **(C)**

Zad 18. Trójkąt równoramienny ma boki $(5; \quad 2a+1; \quad a-1)$ Gdyby założyć że $2a+1 = a-1$ to otrzymamy $a = -2$ i długości boków otrzymalibyśmy jako ujemne.

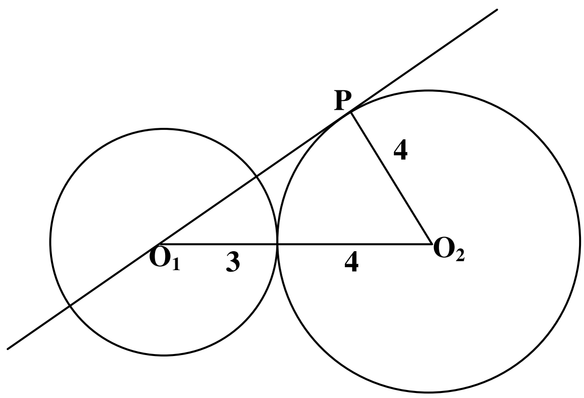
Gdy założymy że $a - 1 = 5$ otrzymamy $a = 6$ i jest taka odpowiedź ale wtedy boki by były $(5; \quad 13; \quad 5)$ - takiego trójkąta nie można zbudować.

$2a + 1 = 5$

$2a = 5 - 1$

$2a = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2$ Trójkąt ma boki $(5; \quad 5; \quad 1)$ **(D)**

Zad 19.



Trójkąt O_1O_2P jest prostokątny (kąt stycznej z promieniem). Należy z twierdzenia Pitagorasa obliczyć długość odcinaka O_1P = x $x^2 + 4^2 = 7^2$

$x^2 = 49 - 16 \Rightarrow x^2 = 33 \Rightarrow x = \sqrt{33}$

$P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{33}\cdot 4 = 2\sqrt{33}$ **(B)**

Zad 20. $y=\frac{2}{m-1}x+m-2$ $y=mx+\frac{1}{m+1}$ Proste są prostopadła gdy współczynniki kierunkowe przy x spełniają warunek $a_1\cdot a_2=-1$ czyli $\frac{2}{m-1}\cdot m=-1$ po pomnożeniu równania przez $m-1$ mamy $2m=-1(m-1)$

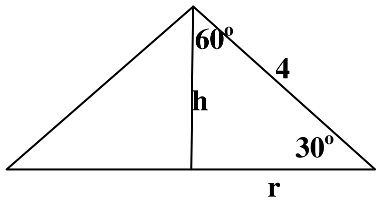
$2m=-m+1 \quad \Longrightarrow \quad 3m=1 \quad \Longrightarrow \quad m=\frac{1}{3}$ **(C)**

Zad 21. $A=(a;\ \ 6)$ $B=(7;\ \ b)$ $M=(3;\ \ 4)$ - środek odcinka AB. Zgodnie ze wzorem na współrzędne środka mamy $\frac{a+7}{2}=3 \quad \Longrightarrow \quad a+7=6 \quad \Longrightarrow \quad a=6-7 \quad \Longrightarrow \quad a=-1$

$\frac{6+b}{2}=4 \quad \Longrightarrow \quad 6+b=8 \quad \Longrightarrow \quad b=8-6 \quad \Longrightarrow \quad b=2$ **(B)**

Zad 22. 3 rzuty monetą $\overline{\overline{\Omega}}=2^3=8$ Dwa orły $A=\{oor;\ \ oro;\ \ roo\}$ $P(A)=\frac{3}{8}=0{,}375$ **(C)**

Zad 23.

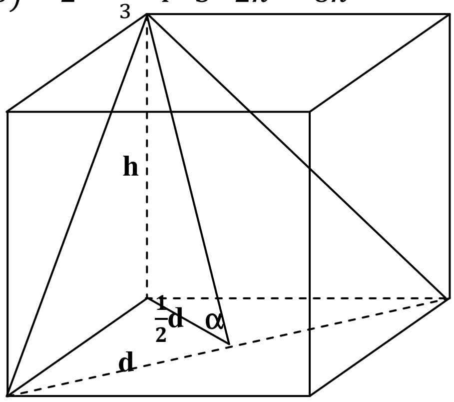


$\sin 30°=\frac{h}{4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}=\frac{h}{4} \quad \Longrightarrow \quad 2h=4 \quad \Longrightarrow \quad h=2$

$\cos 30°=\frac{r}{4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{r}{4} \quad \Longrightarrow \quad 2r=4\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad r=2\sqrt{3}$

$V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\left(2\sqrt{3}\right)^2\cdot 2=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 3\cdot 2\pi=8\pi$ **(D)**

Zad 24.



Jeżeli przekątna *d* jest dwa razy większa od *h* to $\frac{1}{2}d=h$ czyli trójkąt w którym jest kąt α, jest trójkątem równoramiennym prostokątnym stąd $\alpha=45°$ **(B)**

Zad 25. $\frac{31+16+25+29+27+x}{6}=\frac{x}{2}$

$\frac{128+x}{6}=\frac{x}{2} \quad \Longrightarrow \quad 6x=2(128+x) \quad \Longrightarrow \quad 6x=256+2x \quad \Longrightarrow \quad 4x=256$

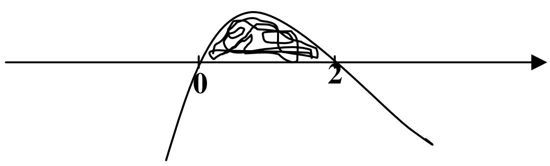
$x=\frac{256}{4} \quad \Longrightarrow \quad x=64$

teraz zbiór po uporządkowaniu ma postać $(16;\ \ 25;\ \ 27;\ \ 29;\ \ 31;\ \ 64)$, średnia liczb środkowych 27 i 29 wynosi **28** **(C)**

Zad 26. $\frac{10+10+7+8+8+7}{6}=\frac{50}{6}=8\frac{2}{6}=8\frac{1}{3}\approx 8$

Błąd bezwzględny to $\frac{1}{3}$ Błąd względny to $\frac{\frac{1}{3}}{8\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}:8\frac{1}{3}=\frac{1}{3}:\frac{25}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{25}=\frac{1}{25}=\frac{4}{100}=4\%$

Zad 27. $2x^2-4x>3x^2-6x$



$2x^2-4x-3x^2+6x>0$

$-x^2+2x>0$

$-x(x-2)>0$

$x_1=0 \vee x-2=0 \quad \Longrightarrow \quad x_2=2$ - pierwiastki równania Odpowiedź $x\in(0;\ \ 2)$

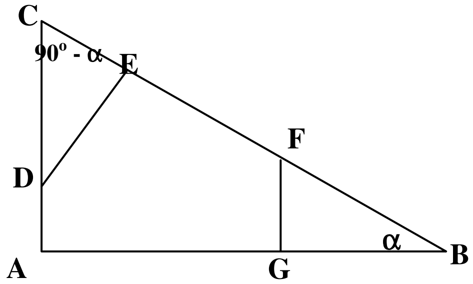
Zad 28. $(4-x)(x^2+2x-15)=0$

$4-x=0 \quad \vee \quad x^2+2x-15=0$

$-x=-4 \quad \vee \quad \Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(-15)=4+60=64 \quad \sqrt{\Delta}=\sqrt{64}=8$

$x_1=4 \quad \vee \quad x_2=\frac{-2-8}{2}=\frac{-10}{2}=-5 \quad x_3=\frac{-2+8}{2}=\frac{6}{2}=3$

Zad 29.



Zadanie zakłada ze wszystkie trójkąty są prostokątne. W trójkącie prostokątnym jeżeli jeden kąt ostry oznaczymy jako α to drugi **90° – α**. Tak więc w trójkącie ABC: $\sphericalangle ABC=\alpha$ oraz $\sphericalangle BCA=90°-\alpha$.
W trójkącie GBF mamy: $\sphericalangle GBF=\alpha$ bo pokrywa się z $\sphericalangle ABC=\alpha$ $\sphericalangle BFG=90°-\alpha$ jako trzeci kąt w trójkącie prostokątnym.
W trójkącie CDE mamy: $\sphericalangle ECD=90°-\alpha$ bo pokrywa się z $\sphericalangle BCA=90°-\alpha$ $\sphericalangle CDE=\alpha$ jako trzeci kąt w trójkącie prostokątnym.
Trójkąty te mają więc odpowiednie kąty równe więc są podobne na podstawie cechy $(k;\ k;\ k)$.

Zad 30. $a_n=2n^2+2n$ to wyraz kolejny $a_{n+1}=2(n+1)^2+2(n+1)=$

$2(n^2+2n+1)+2n+2=2n^2+4n+2+2n+2=2n^2+6n+4$

$a_n+a_{n+1}=2n^2+2n+2n^2+6n+4=4n^2+8n+4=(2n+2)^2$ Otrzymaliśmy kwadrat liczby naturalnej $2n+2$

Zad 31. $R=\log\frac{A}{A_0}$ czyli $6{,}2=\log\frac{A}{10^{-4}}$

$6{,}2=\log(A\cdot 10^4)$

$6{,}2=\log A+\log 10^4$

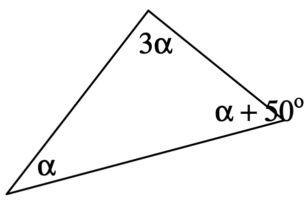
$6{,}2=\log A+4$

$\log A=6{,}2-4$

$\log A=2{,}2 \quad \Longrightarrow \quad 10^{2{,}2}=A \quad \Longrightarrow \quad A>100 \quad bo\ \ 10^2=100$

Odpowiedź Amplituda była większa od 100 cm.

Zad 32.



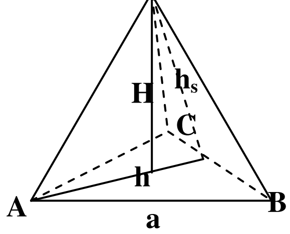
$\alpha+3\alpha+\alpha+50°=180°$ suma miar kątów w trójkącie

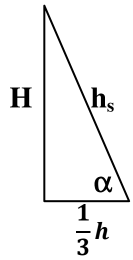
$5\alpha=180°-50° \quad \Longrightarrow \quad 5\alpha=130° \quad \Longrightarrow \quad \alpha=26°$

$3\alpha=3\cdot 26°=78° \quad \quad \alpha+50°=76°$

Kąty trójkąta to 26°; 78°; 76°

Zad 33.





podstawa trójkąt równoboczny $P = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$ Wysokość ostrosłupa taka sama jak wysokość podstawy $H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$V = \frac{1}{3}P_p H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \cdot 3}{3 \cdot 8} = \frac{a^3}{8} = 27$

$\frac{a^3}{8} = 27$

$a^3 = 27 \cdot 8 = 216 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \sqrt[3]{216} = 6$ - krawędź podstawy

Aby policzyć pole powierzchni bocznej trzeba policzyć wysokość ściany bocznej h_s korzystając z twierdzenia Pitagorasa $H^2 + \left(\frac{1}{3}h_p\right)^2 = {h_s}^2$

$\frac{1}{3}h_p = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \qquad H = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$\left(3\sqrt{3}\right)^3 + \sqrt{3}^2 = {h_s}^2$

${h_s}^2 = 9 \cdot 3 + 3 = 27 + 3 = 30 \qquad h_s = \sqrt{30}$

$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{3}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{30} = 9\sqrt{30}$ - Pole powierzchni bocznej

$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{3}h}{h_s} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{3}{30}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Zad 34. Wszystkich liczb dwucyfrowych jest 99 – 9 = 90. Losujemy dwie liczby bez zwracania. Aby wylosować pierwszą liczbę mamy 90 możliwości, aby wylosować drugą liczbę mamy 89 możliwości. $\overline{\overline{\Omega}} = 90 \cdot 89 = 8010$ A – suma wylosowanych liczb wynosi 30.

$A = (10 + 20;\ 11 + 19;\ 12 + 18;\ 13 + 17;\ 14 + 16;\ 16 + 14;\ 17 + 13;\ 18 + 12;\ 19 + 11;\ 20 + 10)$

$\overline{\overline{A}} = 10 \quad P(A) = \frac{10}{8010} = \frac{1}{801}$