Listopad 2015 rok (poziom rozszerzony)
Zadania zamknięte

Zad 1. $f(x) = |x+3| + 5$

$|x+3|$ z faktu że to wartość bezwzględna jest nie ujemne a gdy dodamy 5 to nie ma możliwości aby osiągnąć 0 (***nie ma miejsc zerowych***) **(D)**

Zad 2. $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \sin 30° \cdot \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **(D)**

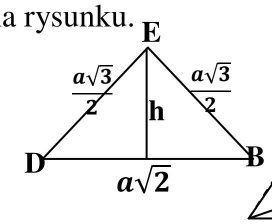
Zad 3. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3$

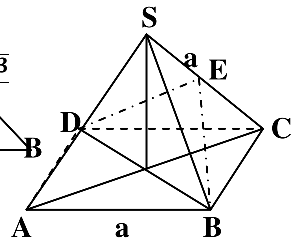
$f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{5}x^4 - 4 \cdot \frac{1}{2}x^3 + 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x-1)^2$

Gdyby badać $x^2(x-1)^2 = 0$ to $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ Punkty te jednak nie są ekstremami lokalnymi a tylko punktami przegięcia bo jak widzimy pochodna funkcji $f'(x) = x^2(x-1)^2$ to kwadraty dwóch liczb czyli jest nieujemna dla wszystkich $x \in R$ Z tego wynik że funkcja to nigdzie nie jest malejąca i nie ma ekstremum **(D)**

Zad 4. Trzeba policzyć pole trójkąta DBE o bokach długości jak na rysunku.

Aby to zrobić trzeba policzyć wysokość tego trójkąta





$$h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \qquad h = \frac{a}{2}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$$

(C)

Zad 5. Ciąg określony rekurencyjnie $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{3a_n - n}{2} \end{cases}$

$a_1 = 4 \qquad a_2 = \frac{3 \cdot 4 - 1}{2} = \frac{12-1}{2} = \frac{11}{2} \qquad a_3 = \frac{3 \cdot \frac{11}{2} - 2}{2} = \frac{\frac{33}{2} - 2}{2} = \frac{\frac{29}{2}}{2} = \frac{29}{4}$

$a_4 = \frac{3 \cdot \frac{29}{4} - 3}{2} = \frac{\frac{87}{4} - \frac{12}{4}}{2} = \frac{\frac{75}{4}}{2} = \frac{75}{8}$ **(D)**

Zad 6. $A = (5;\ 2) \qquad B = (1;\ -3) \qquad C = (-2;\ -8)$

Prosta BC $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-8-(-3)}{-2-1} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$ Mamy prostą $y = \frac{5}{3}x + b$ wstawmy tu punkt $B = (1;\ -3)$

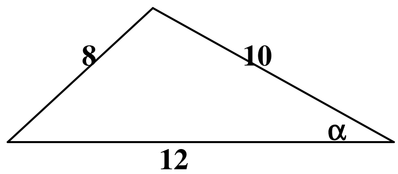
$-3 = \frac{5}{3} \cdot 1 + b \qquad b = -3 - \frac{5}{3} = -4\frac{2}{3}$ Prosta BC $y = \frac{5}{3}x - 4\frac{2}{3}$ Przekształćmy wzór do postaci ogólnej

$y = \frac{5}{3}x - 4\frac{2}{3} | \cdot 3 \qquad 3y = 5x - 14 \qquad 5x - 3y - 14 = 0$

$d = \frac{|5 \cdot 5 - 3 \cdot 2 - 14|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2}} = \frac{|25 - 6 - 14|}{\sqrt{25+9}} = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34} \approx 0{,}85749$

Odpowiedź: $\boxed{8}\boxed{5}\boxed{7}$

Zad 7. Najmniejszy kąt leży naprzeciwko najmniejszego boku -



Z twierdzenia kosinusów mamy: $8^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos\alpha$

$64 = 100 + 144 - 240\cos\alpha$

$240\cos\alpha = 244 - 64 \qquad 240\cos\alpha = 180 |: 240$

$\cos\alpha = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ Teraz z jedynki trygonometrycznej $\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \approx \frac{2{,}64575}{4} = 0{,}6614 \ldots$

Odpowiedź $\boxed{6}\boxed{6}\boxed{1}$

Zad 8. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2-1)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 + 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-6x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(-\sqrt{7}) = \frac{-6 \cdot (-\sqrt{7})}{\left((-\sqrt{7})^2 - 4\right)^2} = \frac{6\sqrt{7}}{(7-4)^2} = \frac{6\sqrt{7}}{3^2} = \frac{6\sqrt{7}}{9} = \frac{2\sqrt{7}}{3} \approx 1{,}763834 \ldots$$

Odpowiedź: $\boxed{1}\boxed{7}\boxed{6}$

Zad 9. $\lim_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\cdots+2n}{11n^2-1}$ W liczniku mamy ciąg arytmetyczny $a_1 = 2;$ $a_n = 2n$ więc jego suma to:

$S_n = \frac{2+2n}{2}n = \frac{2(1+n)}{2}n = n(n+1)$ tak więc mamy:

$\lim_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\cdots+2n}{11n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{11n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{11n^2-1} = \frac{1}{11} \approx 0{,}0909\ ...$

Odpowiedź: $\boxed{0}\,\boxed{9}\,\boxed{0}$

Zad 10. $x^2 + 7x + 4$ mamy obliczyć sumę sześcianów pierwiastków czyli $x_1^3 + x_2^3$

Korzystając ze wzoru $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ mamy:

$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$

czyli $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$

Teraz korzystając ze wzorów Viete'a mamy: $x_1x_2 = \frac{c}{a} = 4$ $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -7$

$x_1^3 + x_2^3 = (-7)^3 - 3\cdot 4\cdot(-7) = -343 + 84 = -259$

Odpowiedź: $\boxed{2}\,\boxed{5}\,\boxed{9}$

Zad 11. Jeżeli $\log_{24} 6 = a$ to $\log_6 256 = \frac{4(1-a)}{a}$

Wprowadźmy przekształcenie: jeżeli $\log_{24} 6 = a$

to $\log_6 24 = \frac{\log_{24} 24}{\log_{24} 6} = \frac{1}{a}$ (zgodnie ze wzorem na zamianę podstawy logarytmu)

$\log_6 256 = \log_6 4^4 = 4\log_6 4 = 4\left(\log_6 \frac{24}{6}\right) = 4(\log_6 24 - \log_6 6) = 4\left(\frac{1}{a} - 1\right) = 4\left(\frac{1}{a} - \frac{a}{a}\right) = 4\cdot\frac{1-a}{a} = \frac{4(1-a)}{a}$

co należało wykazać.

Zad 12. $x^2 - 6x + y^2 + 10y = 0$ okrąg, wyznaczyć styczną prostopadłą do $3x - 4y + 5 = 0$

$x^2 - 6x + y^2 + 10y = 0$ – równanie okręgu w postaci ogólnej, więc w postaci kanonicznej przyjmie postać:$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 - 10 - 25 = 0$ czyli:

$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 34$ okrąg o środku $S = (3;\ -5)$ i promieniu $r = \sqrt{34}$

teraz trzeba zapisać równanie prostej prostopadłej do $3x - 4y + 5 = 0$

Z prostopadłości prostych w postaci ogólnej mamy: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ Warunek będzie spełniony gdy

Np. przyjmiemy $A_2 = 4$ $B_2 = 3$ $3\cdot 4 - 4\cdot 3 = 0$

Prosta prostopadła do danej ma postać $4x + 3y + C = 0$

Trzeba teraz skorzystać ze wzoru na odległość punktu od prostej. Odległość tej prostej od środka okręgu $S = (3;\ -5)$ musi wynosić $r = \sqrt{34}$

$d = \frac{|4\cdot 3 + 3\cdot(-5) + C|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \sqrt{34}$ $\frac{|12-15+C|}{\sqrt{16+9}} = \sqrt{34}$

$\frac{|-3+C|}{5} = \sqrt{34} \quad\Rightarrow\quad |C-3| = 5\sqrt{34}$

$C - 3 = 5\sqrt{34} \quad\vee\quad C - 3 = -5\sqrt{34}$

$C_1 = 3 + 5\sqrt{34}$ $C_2 = 3 - 5\sqrt{34}$

Odpowiedź: proste spełniające warunki zadania to $4x + 3y + 3 + 5\sqrt{34} = 0$

oraz $4x + 3y + 3 - 5\sqrt{34} = 0$

Zad 13. $f(x) = x^2 + (m+2)x + 4$ $\{x_1;\ (m+5);\ x_2\}$ - ciąg geometryczny

I Funkcja jest kwadratowa bo $a = 1 \neq 0$

II $\Delta = (m+2)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = m^2 + 4m + 4 - 16 = m^2 + 4m - 12$

$\Delta > 0$ aby miejsca zerowe istniały i były różne

$m^2 + 4m - 12 > 0$

$\Delta = 4^2 - 4\cdot 1\cdot(-12) = 16 + 48 = 64$ $\sqrt{64} = 8$

$m_1 = \frac{-4-8}{2} = -6$ $m_2 = \frac{-4+8}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$m \in (-\infty;\ -6) \cup (2;\ +\infty)$

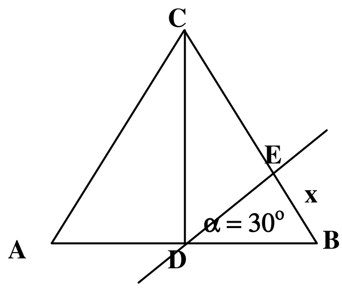
III Liczby: $\{x_1;\ (m+5);\ x_2\}$ mają tworzyć ciąg geometryczny

W ciągu geometrycznym zachodzi zależność $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$ czyli $a_2\cdot a_2 = a_1a_3$ Mamy więc

$(m+5)^2 = x_1\cdot x_2$ Z wzoru Viete'a $x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$

$(m+5)^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad m+5=2 \quad \vee \quad m+5=-2$
$m_1 = -3$ sprzeczność z $m \in (-\infty;\ -6) \cup (2;\ +\infty)$
$m_2 = -7$
Odpowiedź: Jest jedno rozwiązanie dla $m = -7$

Zad 14. Przyjmijmy $|AB| = a \qquad |BD| = \frac{1}{2}a \qquad |CD| = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



$P_{ABC} = \frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
oraz zgodnie z założeniem zadania $P_{BDE} = \frac{1}{8}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{32}$
Wprowadźmy jeszcze oznaczenia $BE = x \qquad ED = y$
Oczywiste jest że w trójkącie DBE $\sphericalangle DBE = 60°$ jako kąt trójkąta ABC
Można więc zapisać $P_{BDE} = \frac{1}{2}\cdot BD\cdot BE\cdot \sin 60°$
czyli $P_{BDE} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{ax\sqrt{3}}{8}$ Mamy więc równanie
$\frac{ax\sqrt{3}}{8} = \frac{a^2\sqrt{3}}{32}\Big|\cdot 8 \quad \Longrightarrow \quad ax\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\Big| : a\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{a}{4}$
Teraz korzystając z twierdzenia cosinusów mamy:
$y^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{4}a\cdot\cos 60°$
$y^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{16}a^2 - \frac{1}{4}a^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{16}a^2 - \frac{1}{8}a^2 = \frac{3}{16}a^2$
$y = \sqrt{\frac{3}{16}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ Tak więc trójkąt BED ma boki długości: $\frac{1}{2}a; \quad \frac{1}{4}a; \quad \frac{a\sqrt{3}}{4}$
Łatwo wykazać że jest to trójkąt prostokątny stosując twierdzenie odwrotne do Twierdzenia Pitagorasa. $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2$
$\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{3}{16}a^2$
Mamy więc trójkąt prostokątny w którym jeden z kątów ma 60° więc drugi kąt ostry ma 30°
Odpowiedź: Kąt $EBD = 30°$

Zad 15. $\sin 2x + \cos 4x = 0$ zastosujmy wzór $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ podstawiając zamiast $x,\ 2x$ mamy: $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$ Mamy zatem:
$\sin 2x + 1 - 2\sin^2 2x = 0$ czyli $-2\sin^2 2x + \sin 2x + 1 = 0$ Mamy więc równanie kwadratowe i robimy podstawienie $\sin 2x = t$ co nam daje
$-2t^2 + t + 1 = 0$
$\Delta = 1^2 - 4\cdot(-2)\cdot 1 = 1 + 8 = 9 \qquad \sqrt{9} = 3$
$t_1 = \frac{-1-3}{2\cdot(-2)} = \frac{-4}{-4} = 1 \qquad t_2 = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad t_1; t_2 \in \langle -1;\ 1\rangle$
I. $\sin 2x = 1 \qquad 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$
II. $\sin 2x = -\frac{1}{2} \qquad 2x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$
$x_2 = \frac{7}{12}\pi + k\pi \qquad x_3 = \frac{11}{12}\pi + k\pi$
Odpowiedź: Równanie ma trzy rozwiązania: $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi; \quad x_2 = \frac{7}{12}\pi + k\pi; \quad x_3 = \frac{11}{12}\pi + k\pi$

Zad 16. Walec $V = \pi(dm^3) \qquad V = \pi r^2 h$ wyznaczmy ze wzoru h
$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{\pi}{\pi r^2} = \frac{1}{r^2}$
Mamy obliczyć najmniejsze pole powierzchni tego walca
$P_{pc} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$
$P_{pc} = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{1}{r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2\pi}{r}$
Otrzymaliśmy wzór na pole powierzchni jako funkcję jednej zmiennej r
$P(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\pi}{r}$ funkcja jest określona dla dowolnego ***r*** dodatniego $D = R_+$
$P'(r) = 4\pi r - \frac{2\pi}{r^2}$

Aby określić dla jakiego ***r*** pole powierzchni jest najmniejsze obliczymy $P'(r) = 0$

$4\pi r - \frac{2\pi}{r^2} = 0 | \cdot r^2$

$4\pi r^3 - 2\pi = 0 | : 2\pi \quad \Rightarrow \quad 2r^3 - 1 = 0$

$2r^3 = 1 | : 2 \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Gdy $r < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ to $r^3 = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3} < \frac{1}{2}$ czyli $2r^3 < 1$ co daje że $2r^3 - 1 < 0$

Natomiast dla $r > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ będzie odwrotnie i otrzymamy $2r^3 - 1 > 0$

Mamy więc minimum lokalne dla $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ oraz $h = \frac{1}{r^2} = \frac{\sqrt[3]{2}^2}{1} = \sqrt[3]{4}$

$P_{pc} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{4}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt[3]{4}} + 2\pi \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt[3]{4}} + 2\pi\sqrt[3]{2} = \frac{2\pi\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}} +$
$2\pi\sqrt[3]{2} = \frac{2\pi\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} + 2\pi\sqrt[3]{2} = \frac{2\pi\sqrt[3]{2}}{2} + 2\pi\sqrt[3]{2} = \pi\sqrt[3]{2} + 2\pi\sqrt[3]{2} = 3\pi\sqrt[3]{2}$

Odpowiedź: Najmniejsze pole powierzchni tego walca jest dla $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ i $h = \sqrt[3]{4}$ i wynosi $3\pi\sqrt[3]{2}$.

Zad 17. I urna 3 kule białe i 7 czarnych

II urna 5 kul białych i 4 czarne.

A) I etap: losujemy jedną kulę z I urny $\overline{\overline{\Omega}} = 3 + 7 = 10$

A – wylosowana kula biała $\overline{\overline{B_1}} = 3 \qquad P(B_1) = \frac{3}{10}$

B – wylosowana kula czarna $\overline{\overline{B_2}} = 7 \qquad P(B_2) = \frac{7}{10}$

B) II etap wylosowana kula włożona do II urny i losujemy 2 kule:

a) – to była kula biała czyli w urnie II jest 6 kul białych i 4 czarne – razem 10

$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10}{1\cdot 2} = 45$

$\overline{\overline{A}} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2} = 15$

Obliczamy prawdopodobieństwo warunkowe wylosowania 2 kul białych pod warunkiem że w I losowaniu została wylosowana biała i przełożona do II urny:

$P(A|B_1) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

b) to była kula czarna czyli w urnie II jest 5 kul białych i 5 czarnych – razem 10 kul

$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10}{1\cdot 2} = 45$

$\overline{\overline{A}} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 10$

Obliczamy prawdopodobieństwo warunkowe wylosowania 2 kul białych pod warunkiem że w I losowaniu została wylosowana czarna i przełożona do II urny:

$P(A|B_2) = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$

Teraz obliczamy prawdopodobieństwo całkowite:

$P(A) = P(A|B_1)\cdot P(B_1) + P(A|B_2)\cdot P(B_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10} + \frac{2}{9}\cdot\frac{7}{10} = \frac{1}{10} + \frac{14}{90} = \frac{9}{90} + \frac{14}{90} = \frac{23}{90}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo że z II urny wylosujemy 2 kule białe wynosi $\frac{23}{90}$.

Zad 18. a; $a + r$; $a + 2r$ - dane trzy liczny tworzące ciąg arytmetyczny

$a - 1$; $a + r + 15$; $a + 2r + 37$ ciąg geometryczny, czyli można zapisać ich zależność:

$\frac{a+r+15}{a-1} = \frac{a+2r+37}{a+r+15}$

Mamy też podaną sumę $a + a + r + a + 2r = 63$ czyli $3a + 3r = 63$

Jest więc do rozwiązania układ równań:

$$\begin{cases} 3a + 3r = 63 | : 3 \\ \frac{a+r+15}{a-1} = \frac{a+2r+37}{a+r+15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + r = 21 \\ (a + r + 15)(a + r + 15) = (a - 1)(a + 2r + 37) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 21 - a \\ (a + 21 - a + 15)(a + 21 - a + 15) = (a - 1)[a + 2(21 - a) + 37] \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 21 - a \\ 36 \cdot 36 = (a - 1)(a + 42 - 2a + 37) \end{cases}$$

$\begin{cases} r = 21 - a \\ 1296 = (a - 1)(-a + 79) \end{cases}$ rozwiązuję teraz II równanie:

$1296 = -a^2 + 79a + a - 79$

$a^2 - 80a + 1296 + 79 = 0$

$a^2 - 80a + 1375 = 0$

$\Delta = (-80)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1375 = 6400 - 5500 = 900$ $\sqrt{900} = 30$

$a_1 = \frac{80-30}{2} = \frac{50}{2} = 25$ $a_2 = \frac{80+30}{2} = \frac{110}{2} = 55$

$r_1 = 21 - 25 = -4$ $r_2 = 21 - 55 = -34$

układ równań ma dwa rozwiązania $\begin{cases} a = 25 \\ r = -4 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 55 \\ r = -34 \end{cases}$

Zadanie ma 2 rozwiązania:

I. dla $a = 25$; $r = -4$ mamy liczby: 25; $25 - 4 = 21$; $25 - 8 = 17$

II dla $a = 55$; $r = -34$ mamy liczby: 55; $55 - 34 = 21$; $55 - 68 = -13$

Odpowiedź: Liczbami spełniającymi warunki zadania są 25; 21; 17 lub 55; 21; -13.