Operon listopad 2015r - poziom podstawowy

Zadania zamknięte

Zad 1. $8^{23} \cdot 4^{17} = (2^3)^{23} \cdot (2^2)^{17} = 2^{69} \cdot 2^{34} = 2^{69+34} = 2^{103}$ **(A)**

Zad 2. $36^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{36^2}$ - niewymierna

$36^{\frac{3}{2}} = \sqrt{36}^3 = 6^3 = 216$ - liczba wymierna **(B)**

Zad 3. $\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{7}^2 - 2\sqrt{7}\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 7 - 2\sqrt{21} + 3 = 10 - 2\sqrt{21}$ **(C)**

Zad 4. $f(x) = (x+6)^2$ miejscem zerowym jest tylko $x = -6$ bo mamy $(-6+6)^2 = 0^2 = 0$ **(B)**

Zad 5. $\tan\alpha = \frac{3}{4} = \frac{3x}{4x}$ czyli przyprostokątne możemy oznaczyć jako $3x$ $oraz$ $4x$ teraz z Twierdzenia Pitagorasa mamy $(3x)^2 + (4x)^2 = 30^2$

$9x^2 + 16x^2 = 900$

$25x^2 = 900 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{900}{25} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 36 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{36} \quad \Longrightarrow \quad x = 6$

krótsza przyprostokątna $3x = 3 \cdot 6 = 18$ **(B)**

Zad 6. $\boldsymbol{x}$ – cena wyjściowa towaru

po zmniejszeniu o 10% mamy $x - \frac{1}{10}x = \frac{9}{10}x = 90\%x$

teraz tą cenę zwiększamy o 20% $\frac{9}{10}x + \frac{2}{10} \cdot \frac{9}{10}x = \frac{90}{100}x + \frac{18}{100}x = \frac{108}{100}x = 108\%x$ **(C)**

Zad 7. $f(x) = -4x^2 + 16x - 23$ Funkcja z racji ujemnego $a = -4$ ma wykres gałęziami do dołu czyli jest rosnąca dla $x \in (-\infty;\ \ p)$ $p = \frac{-b}{2a} = \frac{-16}{2\cdot(-4)} = \frac{-16}{-8} = 2$ **(A)**

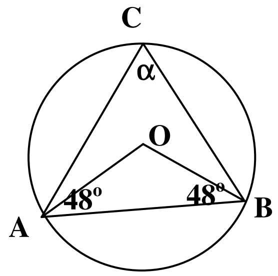
Zad 8. $x - \sqrt{3}x > 2$

$x\left(1 - \sqrt{3}\right) > 2 \,|\, : \left(1 - \sqrt{3}\right)$ Liczba $1 - \sqrt{3}$ jest ujemna więc zmienia się znak nierówności

$x < \frac{2}{(1-\sqrt{3})} \quad \Longrightarrow \quad x < \frac{2(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} \quad \Longrightarrow \quad x < \frac{2(1+\sqrt{3})}{1-3} \quad \Longrightarrow \quad x < \frac{2(1+\sqrt{3})}{-2} \quad \Longrightarrow \quad x < -1 - \sqrt{3}$

$x \in \left(-\infty;\ \ -1 - \sqrt{3}\right)$ **(A)**

Zad 9.



Trójkąt ABO równoramienny bo |AO| = |BO| = r $\sphericalangle AOB = 180° - (2 \cdot 48°) = 180° - 96° = 84°$

$\sphericalangle\alpha = \frac{1}{2} \cdot 84° = 42°$ - kąt wpisany jest połową kąta środkowego **(A)**

Zad 10. $a_n = -3n + 118$

$-3n + 118 > 0 \quad \Longrightarrow \quad -3n > -118 \quad \Longrightarrow \quad n < \frac{118}{3} \quad \Longrightarrow \quad n < 39\frac{1}{3}$ **(C)**

Zad 11. $f(x) = (x-4)^2 + 9$ miejsce zerowe $f(x) = 0$ czyli $(x-4)^2 + 9 = 0$

$(x-4)^2 = -9$ niemożliwe jest aby kwadrat liczby równał się liczbie ujemnej **(A)**

Zad 12. $f(x) = 2^x + 3$ Wiadomym jest że zbiorem wartości funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ jest przedział $(0;\ \ +\infty)$. Tu mamy funkcję przesuniętą o 3 do góry więc $Zbw = (3;\ \ +\infty)$ **(D)**

Zad 13. $a_1 = 1 \quad a_2 = -2 \quad r = a_2 - a_1 = -2 - 1 = -3$ ciąg arytmetyczny

$a_9 = a_1 + 8 \cdot r = 1 + 8 \cdot (-3) = 1 - 24 = -23$ **(A)**

Zad 14. $y = 4x + 1$ oś OY przecinana jest w punkcie $(0;\ \ b) = (0;\ \ 1)$

Obliczmy miejsce zerowe $4x + 1 - 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{4}$

Oś OX przecinana jest w punkcie $(mz;\ \ 0) = \left(-\frac{1}{4};\ \ 0\right)$ **(C)**

Zad 15. $f(x) = x^2 + 4x + 10$ prosta $y = m$ jest równoległa do osi OX. Aby wyznaczyć zbiór do którego ma należeć m aby wykresy nie miały punktów wspólnych, trzeba określić zbiór wartości funkcji kwadratowej $Zbw = \langle q;\ \ +\infty)$ i następnie wykonać odejmowanie zbiorów $R \backslash \langle q;\ \ +\infty)$

$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(4^2 - 4\cdot1\cdot10)}{4} = \frac{-(16-40)}{4} = \frac{24}{4} = 6$ Odp:$R \backslash \langle q;\ \ +\infty) = (-\infty;\ \ 6)$ **(B)**

Zad 16. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 5 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = 5\cos\alpha$

$W = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{5\cos\alpha - \cos\alpha}{5\cos\alpha + \cos\alpha} = \frac{4\cos\alpha}{6\cos\alpha} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ **(B)**

Zad 17. Stosunek przyprostokątnych czyli $\frac{a}{b} = \tan\alpha = \sqrt{3}$ $\alpha = 60°$ $\beta = 90° - 60° = 30°$ **(B)**

Zad 18. Kąt pełny $\alpha = 360°$ - taki maksymalnie może być kąt środkowy. Maksymalny kąt wpisany to $\frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$ Kąt wpisany oparty na $\frac{1}{9}$ okręgu to $180° \cdot \frac{1}{9} = 20°$ **(C)**

Zad 19. $S = \left(-\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$ $A = \left(-\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$ $B = (x;\ y)$

$\frac{-\frac{1}{3}+x}{2} = -\frac{1}{2} | \cdot 2$

$-\frac{1}{3} + x = -1$

$x = -1 + \frac{1}{3}$

$x = -\frac{2}{3}$

$\frac{\frac{2}{3}+y}{2} = \frac{3}{2} | \cdot 2$

$\frac{2}{3} + y = 3$

$y = 3 - \frac{2}{3}$

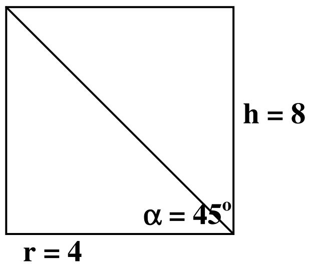
$y = 2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ **(A)**

Zad 20. $\{1;\ 4;\ 1;\ 5;\ 9;\ 2;\ 1;\ 1\}$ średnia $\bar{a} = \frac{1+4+1+5+9+2+1+1}{8} = \frac{24}{8} = 3$

$\sigma^2 = \frac{(1-3)^2+(4-3)^2+(1-3)^2+(5-3)^2+(9-3)^2+(2-3)^2+(1-3)^2+(1-3)^2}{8} = \frac{4+1+4+4+36+1+4+4}{8} = \frac{58}{8} = \frac{29}{4}$

$\sigma = \sqrt{\frac{29}{4}} \approx 2{,}692582403567252$ **(B)**

Zad 21. Jeżeli przekątna przekroju osiowego jest pod kątem 45° do podstawy to przekrój osiowy jest kwadratem



$V = \pi r^2 \cdot h = \pi 4^2 \cdot 8 = 16 \cdot 8\pi = 128\pi$ **(B)**

Zad 22. $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha$ korzystając z danych zadania mamy:

$15 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \sin\alpha$

$15 = 30 \cdot \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{30}{15} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30°$ **(D)**

Zad 23. $3x - 2y = 7$

$-2y = -3x + 7 | : (-2)$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ $a = \frac{3}{2}$ współczynnik kierunkowy.

Prosta prostopadła ma współczynnik kierunkowy $a_2 = -\frac{2}{3}$ bo $\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$ **(B)**

Zad 24. Parzysta cyfra tysięcy wybierana ze zbioru $\overline{\overline{\{2;\ 4;\ 6;\ 8\}}} = 4$

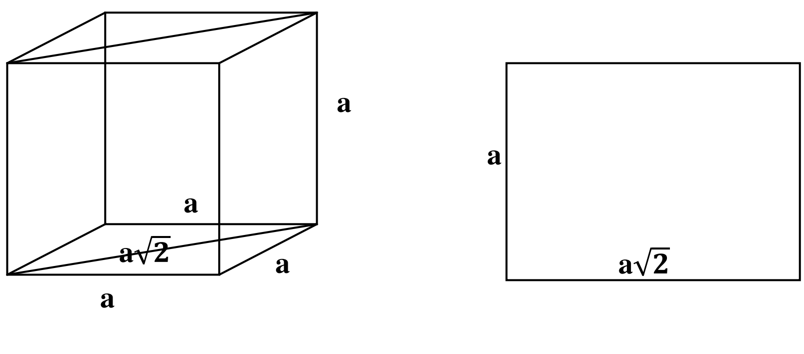
Parzysta cyfra setek wybierana ze zbioru $\overline{\overline{\{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8\}}} = 5 - 1 = 4$ pomniejszonego o cyfrę już wybraną

Parzysta cyfra dziesiątek wybierana ze zbioru $\overline{\overline{\{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8\}}} = 5 - 2 = 3$ pomniejszonego o 2 cyfry już wybrane

Cyfra jedności wybierana ze wszystkich cyfr ale zbiór pomniejszony o cyfry już wybrane $10 - 3 = 7$

wynik $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7$ **(A)**

Zad 25.



Z warunków zadania mamy $a \cdot a\sqrt{2} = 16 \quad \Rightarrow \quad a^2\sqrt{2} = 16 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{16}{\sqrt{2}}$

Pole powierzchni całkowitej $6a^2 = 6 \cdot \frac{16}{\sqrt{2}} = \frac{96}{\sqrt{2}} = \frac{96\sqrt{2}}{2} = 48\sqrt{2}$ **(C)**

<u>Zadania otwarte</u>

Zad 26. $a_n = \frac{3n-1}{2n+5} \quad \frac{3n-1}{2n+5} = \frac{33}{27}$

$(3n-1) \cdot 27 = 33(2n+5)$

$81n - 27 = 66n + 165$

$81n - 66n = 165 + 27$

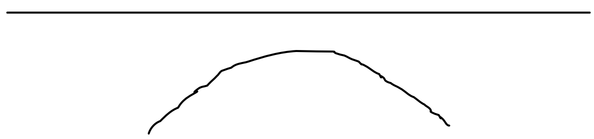
$15n = 192 | :15 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{192}{15} = 12{,}8 \notin N$

Odpowiedź: Nie istnieje wyraz o numerze 12,8

Zad 27. $-x^2 + 8x - 20 < 0$

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-20) = 64 - 80 = -16$ $\Delta < 0$ więc równanie nie ma pierwiastków, czyli wykres nie ma kontaktu z osią OX.

Nierówność jest spełniona dla każdego x gdyż $-x^2$ wskazuje że gałęzie wykresu są do dołu oraz nierówność jest < 0



Odpowiedź: Rozwiązaniem nierówności jest $x \in (-\infty; \quad +\infty)$ czyli $x \in R$.

Zad 28. $A = (-2; \quad 4) \quad B = (6; \quad 2)$

$|AB| = \sqrt{\left(6-(-2)\right)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = \sqrt{4 \cdot 17} = 2\sqrt{17}$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{17} \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{51}$

Odpowiedź Wysokość tego trójkąta równobocznego wynosi $\sqrt{51}$

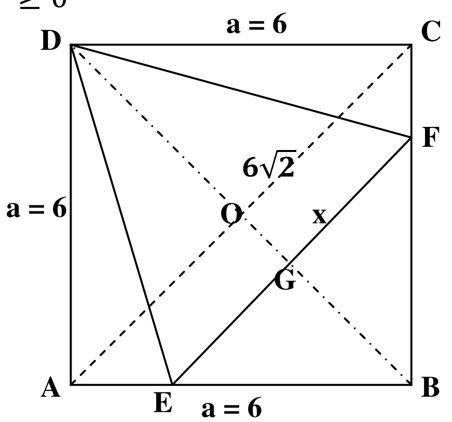
Zad 29. $x^2 - 6x + y^2 - 4y + 13 \geq 0$

$x^2 - 6x + y^2 - 4y + 13 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = (x-3)^2 + (y-2)^2$

Jak widać lewa strona nierówności do udowodnienia została przekształcona do postaci dwóch kwadratów liczb. Kwadrat liczby jest liczbą nieujemną tak więc suma kwadratów liczb nieujemnych jest liczbą nieujemną.

$(x-3)^2 + (y-2)^2 \geq 0$

Zad 30.



Wykazać że bok trójkąta równobocznego tak wpisanego ma długość $b = 6\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$

Korzystając z faktu że trójkąty ABC i EBF są podobne zapisujemy stosunek odpowiednich odcinków w tych trójkątach czyli stosunek najdłuższego boku do wysokości opuszczonej na ten bok mamy:

$\frac{AC}{EF} = \frac{BO}{BG} \quad \Rightarrow \quad \frac{6\sqrt{2}}{x} = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{2} - \frac{x\sqrt{3}}{2}}$ gdzie |BG| obliczamy odejmując od przekątnej kwadratu $DB = 6\sqrt{2}$ wysokość trójkąta $DG = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Przekształcając otrzymaną proporcję mamy:

$6\sqrt{2}\left(6\sqrt{2} - \frac{x\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{2}x \quad \Rightarrow \quad 36 \cdot 2 - 3x\sqrt{6} = 3\sqrt{2}x | :3$

$12 \cdot 2 - x\sqrt{6} = x\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad x\sqrt{6} + x\sqrt{2} = 24$

$x(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{24(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{24(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2} = \frac{24(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} = 6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

Zad 31. $f(x) = ax^2 + bx + c \quad q = 10 \quad A = (4;\ -2)$ należy do wykresu, jest rosnąca dla $x \in (-\infty;\ 2\rangle$ czyli $p = 2 \quad -\frac{b}{2a} = 2 \quad \Rightarrow \quad -b = 4a \quad \Rightarrow \quad b = -4a$

$f(x) = ax^2 - 4ax + c$ mamy dane 2 punkty leżące na wykresie $A = (4;\ -2) \quad P = (2;\ 10)$

Wstawmy współrzędne tych punktów do wzoru funkcji:

$\begin{cases} -2 = a \cdot 4^2 - 4a \cdot 4 + c \\ 10 = a \cdot 2^2 - 4a \cdot 2 + c \end{cases}$

$\begin{cases} -2 = 16a - 16a + c \\ 10 = 4a - 8a + c \end{cases}$

$\begin{cases} -2 = c \\ 10 = -4a + (-2) \end{cases}$

$\begin{cases} c = -2 \\ 4a = -12 |: 4 \end{cases}$

$\begin{cases} c = -2 \\ a = -3 \end{cases}$

$b = -4a \quad \Rightarrow \quad b = -4 \cdot (-3) \quad \Rightarrow \quad b = 12$

Odpowiedź: Funkcja ma postać $f(x) = -3x^2 + 12x - 2$

Zad 32. $a_1 = 4; \quad a_2 = a_1 + r = 4 + r; \quad a_4 = a_1 + 3r = 4 + 3r; \quad a_7 = a_1 + 6r = 4 + 6r$

$(4+r)^2 + (4+3r)^2 + (4+6r)^2 = 702$

$16 + 8r + r^2 + 16 + 24r + 9r^2 + 16 + 48r + 36r^2 = 702$

$46r^2 + 80r + 48 - 702 = 0$

$46r^2 + 80r - 654 = 0 |: 2$

$23r^2 + 40r - 327 = 0$

$\Delta = 40^2 - 4 \cdot 23 \cdot (-327) = 1600 + 30084 = 31684 \quad \sqrt{31684} = 178$

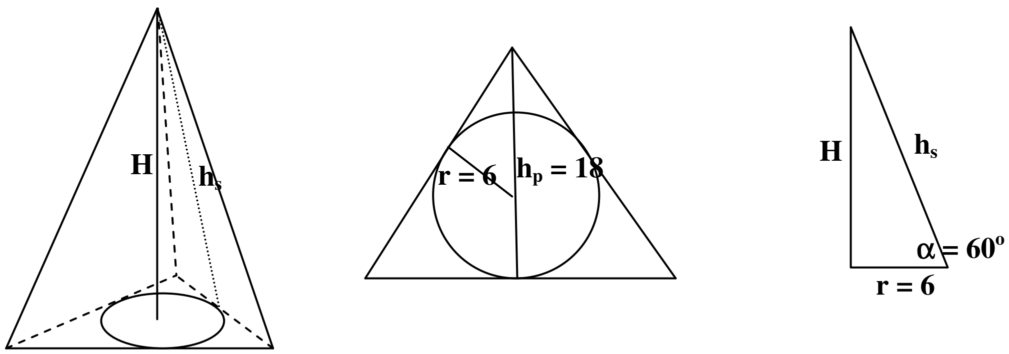
$r_1 = \frac{-40-178}{2 \cdot 23} = \frac{-218}{46} = -\frac{109}{23} \qquad r_2 = \frac{-40+178}{2 \cdot 23} = \frac{138}{46} = 3$

$a_n = a_1 + (n-1)r$

Dla $r = 3$ mamy: $a_n = 4 + (n-1)3 = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$

Dla $r = -\frac{109}{23}$ mamy: $a_n = 4 + (n-1)\left(-\frac{109}{23}\right) = 4 - \frac{109}{23}n + \frac{109}{23} = -\frac{109}{23}n + \frac{201}{23}$

Zad 33.



Jeżeli $r = 6$ to $h_p = 3 \cdot 6 = 18$ wysokość w podstawie $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$18 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad a\sqrt{3} = 36 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{36}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{36\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad a = 12\sqrt{3}$ - krawędź podstawy

Teraz z trójkąta jaki tworzą wysokość ostrosłupa, wysokość ściany i promień okręgu wpisanego obliczymy wysokość ostrosłupa i wysokość ściany

$\cos 60° = \frac{6}{h_s} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{6}{h_s} \quad \Rightarrow \quad h_s = 12$

$\sin 60° = \frac{H}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{12} \quad \Rightarrow \quad 2H = 12\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad H = 6\sqrt{3}$

Objętość: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_p \cdot H = \frac{1}{6} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 18 \cdot 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cdot 108\sqrt{3} = 216 \cdot 3 = 648$

Pole powierzchni bocznej: $P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{3}{2} 12\sqrt{3} \cdot 12 = 18\sqrt{3} \cdot 12 = 216\sqrt{3}$