Matura poprawkowa sierpień 2015r

<u>*Zadania zamknięte*</u>

Zad 1. $a=\frac{3}{2} \quad b=2 \qquad \frac{a\cdot b}{a+b}=\frac{\frac{3}{2}\cdot 2}{\frac{3}{2}+2}=\frac{3}{\frac{7}{2}}=3\cdot\frac{2}{7}=\frac{6}{7}$ **(C)**

Zad 2. $a=40 \qquad b=100 \qquad a\cdot b=4000$

$0{,}8\cdot a=0{,}8\cdot 40=32 \qquad 1{,}2\cdot b=1{,}2\cdot 100=120 \qquad 0{,}8\cdot a\cdot 1{,}2\cdot b=32\cdot 120=3840$

$4000-3840=160$ pole zmniejszyło się o $160cm^2$ $\qquad \frac{160}{4000}=\frac{16}{400}=\frac{1}{25}=4\%$ **(D)**

Zad 3. $\frac{9^5\cdot 5^9}{45^5}=\frac{9^5\cdot 5^5\cdot 5^4}{45^5}=\frac{(9\cdot 5)^5\cdot 5^4}{45^5}=5^4$ **(D)**

Zad 4. $\sqrt{\frac{9}{7}}+\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{3}{\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{3\cdot 3}{\sqrt{7}\cdot 3}+\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot 3}=\frac{9+7}{\sqrt{7}\cdot 3}=\frac{16}{3\sqrt{7}}=\frac{16\sqrt{7}}{3\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\frac{16\sqrt{7}}{21}$ **(B)**

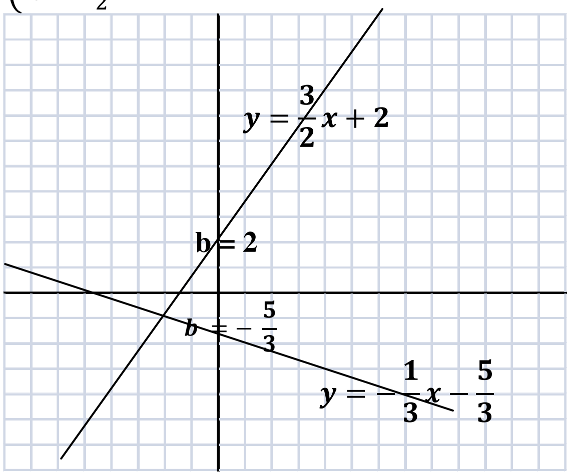
Zad 5. $\log_5 0{,}04-\frac{1}{2}\log_{25}5\cdot\log_{25}1=\log_5\frac{1}{25}-\frac{1}{2}\log_{25}5\cdot 0=\log_5(5)^{-2}-0=-2$ **(C)**

Zad 6. $(a+5)^2-(a^2+10a)=a^2+10a+25-(a^2+10a)=25$ **(D)**

Zad 7. $\begin{cases} x+3y=-5 \\ 3x-2y=-4 \end{cases}$

$\begin{cases} 3y=-x-5 \mid :3 \\ -2y=-3x-4 \mid :(-2) \end{cases}$

$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3} \\ y=\frac{3}{2}x+2 \end{cases}$ Układ równań doprowadzony do postaci kierunkowej..



(A)

Zad 8. $2(x-2)\le 4(x-1)+1$

$2x-4\le 4x-4+1$

$2x-4x\le 4-4+1$

$-2x\le 1 \mid :(-2)$ przy dzieleniu przez liczbę ujemną zmieniamy znak nierówności

$x\ge -\frac{1}{2}$ Najmniejszą liczbą całkowitą większa od $-\frac{1}{2}$ jest 0 **(C)**

Zad 9. $x^2(x+1)=x^2-8$

$x^3+x^2-x^2+8=0$

$x^3+8=0 \qquad x=-2$ **(B)**

Zad 10. $f(x)=\frac{2x-8}{x}$

$f(\sqrt{2})=\frac{2\sqrt{2}-8}{\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{2}-8)\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-8\sqrt{2}}{2}=\frac{4-8\sqrt{2}}{2}=\frac{2(2-4\sqrt{2})}{2}=2-4\sqrt{2}$ **(A)**

Zad 11. $W=(-3;\ \ 5) \qquad W=(p;\ \ q)$

$f(x)=a(x-p)^2+q$ aby gałęzie były do dołu to $a<0$ oraz mamy $p=-3$ czyli

$f(x)=-(x+3)^2+5$ **(C)**

Zad 12. $y=2x-3$ Funkcja przecina oś OY w punkcie $(0;\ \ b)$ czyli $(0;\ \ -3)$ **(A)**

Zad 13. $y=f(x) \qquad W=(2;\ \ 2)$

$g(x)=f(x+2) \qquad W=(2-2;\ \ 2)=(0;\ \ 2)$ **(B)**

Zad 14. $a_1=14 \qquad r=7 \qquad a_{12}=a_1+11r=14+11\cdot 7=14+77=91$ **(C)**

Zad 15. $a_n=\frac{2^n-1}{2^n+1} \qquad a_5=\frac{2^5-1}{2^5+1}=\frac{32-1}{32+1}=\frac{31}{33}$ **(B)**

Zad 16. $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ To korzystając z jedynki trygonometrycznej mamy:

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\frac{9}{16} + \cos^2\alpha = 1$

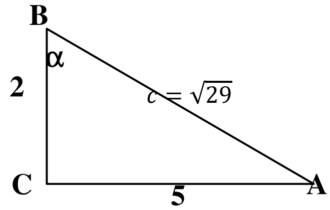
$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{16}$ $\qquad$ $\cos^2\alpha = \frac{7}{16}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ **(B)**

Zad 17. Należy wyliczyć długośc przeciwprostokątnej:

$2^2 + 5^2 = c^2$ $\qquad$ $c = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$



(C)

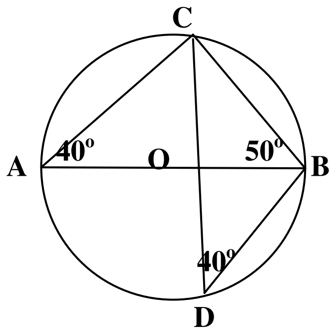
Zad 18. $\alpha = 150°$ kąt rozwarty to $\beta = 30°$ kąt ostry rombu

$P = a \cdot a \cdot \sin\beta = 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 36 \cdot \frac{1}{2} = 18$ **(B)**

Zad 19. Trójkąt ABC jest prostokątny bo AB jest średnicą.

Jeżeli kąt ABC = 50° to kąt BAC = $90° - 50° = 40°$

Kąty $BAC\ i\ BDC$ są równe bo są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku



(A)

Zad 20. $A = (-4;\ \ 3)$ $\qquad$ $B = (8;\ \ 7)$. Współczynnik kierunkowy prostej to

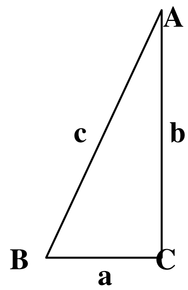
$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-3}{8+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ **(D)**

Zad 21. $S = (2;\ -5)$ $\qquad$ $A = (-4;\ \ 3)$ $\quad$ $B = (8;\ \ b)$ gdzie S jest środkiem odcinka AB.

$-5 = \frac{3+b}{2} | \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad -10 = 3 + b \quad \Rightarrow \quad b = -13$ **(A)**

Zad 22. Obracając ten trójkąt wokół boku ***b*** otrzymujemy stożek o promieniu podstawy ***a*** i wysokości ***b***.

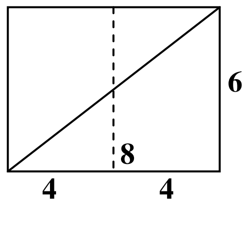
$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot b \cdot \pi$



(A)

Zad 23. $8^2 + 6^2 = c^2$- przekątna przekroju walca.

$c = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$



(D)

Zad 24. $\overline{\overline{\Omega}} = 15 + 18 = 33$ liczba wszystkich osób

$\overline{\overline{A}} = 15$ liczba kobiet $P(A) = \frac{15}{33}$ **(C)**

Zad 25. Aby liczba była większa od 3000 musi na początku być 3

Zadanie więc się sprowadza do pytania: Ile liczb trzycyfrowych można utworzyć z cyfr 1; 2; 3 zakładając możliwość powtarzania cyfr. Znając prawa kombinatoryki mamy tu wariację z powtórzeniami czyli $3^3 = 27$ **(D)**

<u>Zadania otwarte</u>

Zad 26. $\frac{2x-4}{x} = \frac{x}{2x-4}$ $\quad$ $x \neq 0;$ $\quad$ $x \neq 2$

$(2x-4)(2x-4) = x^2$

$4x^2 - 8x - 8x + 16 = x^2$

$3x^2 - 16x + 16 = 0$

$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = 256 - 192 = 64$ $\qquad$ $\sqrt{64} = 8$

$x_1 = \frac{16-8}{2\cdot3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{16+8}{2\cdot3} = \frac{24}{6} = 4$

Odp: $x_1 = 1\frac{1}{3}$ $\qquad$ $x_2 = 4$

Zad 27. $\overline{\overline{\Omega}} = 6 \cdot 8 = 48$ $\qquad$ $\Omega = \{(11); (12); \cdots; (16); \cdots; (61) \cdots (68)\}$

$A = \{(11); (22); (33); (44); (55); (66)\}$ $\quad$ $\overline{\overline{A}} = 6$

$P(A) = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$

Prawdopodobieństwo zdarzenia że liczba będzie podzielna przez 11 wynosi $\frac{1}{8}$.

Zad 28. $20x \geq 4x^2 + 24$

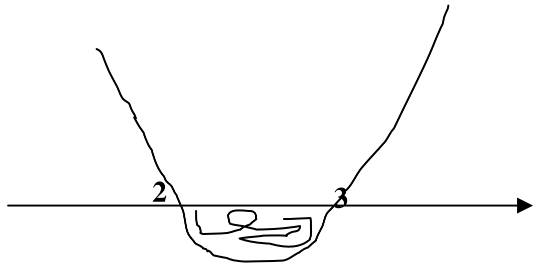
$-4x^2 + 20x - 24 \geq 0 |: (-4)$

$x^2 - 5x + 6 \leq 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$ $\qquad$ $\sqrt{1} = 1$

$x_1 = \frac{5-1}{2\cdot1} = \frac{4}{2} = 2$ $\qquad$ $x_2 = \frac{5+1}{2\cdot1} = \frac{6}{2} = 3$

Odpowiedź $x \in \langle 2; \quad 3\rangle$



Zad 29. $\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{7}{2}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{7}{2}$ Sprowadzimy ułamki do wspólnego mianownika

$\frac{\sin\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{7}{2}$

$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{7}{2}$

$\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{7}{2}$ czyli $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2}{7}$

Zad 30. $x^3 + y^3 \geq x^2y + y^2x$ gdy $x \geq 0; \quad y \geq 0$

$x^3 + y^3 - x^2y - y^2x \geq 0$

$x^3 - x^2y + y^3 - y^2x \geq 0$

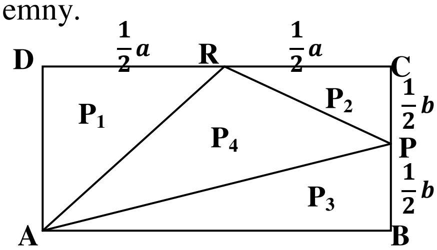
$x^2(x-y) - y^2(x-y) \geq 0$

$(x^2 - y^2)(x-y) \geq 0$

$(x-y)(x+y)(x-y) \geq 0$

$(x-y)^2(x+y) \geq 0$ Ta postać tego wyrażenia jest na pewno nieujemna bo mamy kwadrat liczby $(x-y)$ który jako kwadrat nie może być ujemny, oraz liczbę $(x+y)$ która jako suma liczb nieujemnych jest nieujemna. Iloczyn liczb nieujemnych jest nieujemny.

Zad 31. Przyjmijmy że |AB| = a |BC| = b



$P = a \cdot b$ - pole całego prostokąta

Pole trójkąta ARD $P_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{4}a \cdot b = \frac{1}{4}P$

Pole trójkąta PCR $P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b = \frac{1}{8}a \cdot b = \frac{1}{8}P$

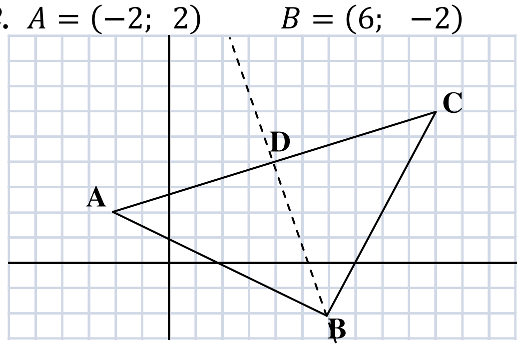
Pole trójkąta ABP $P_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}a \cdot b = \frac{1}{4}P$

Pole trójkąta APR $P_4 = P - (P_1 + P_2 + P_3) = P - \left(\frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P + \frac{1}{4}P\right) = P - \frac{5}{8}P = \frac{3}{8}P$

Suma pól ARD i PCR to $\frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P = \frac{3}{8}P$

Stąd mamy tezę zadania $P_1 + P_2 = P_4$.

Zad 32. $A = (-2; \ 2)$ $\qquad$ $B = (6; \ -2)$ $\qquad$ $C = (10; \ 6)$



Na początek wykażemy że |AB| = |BC| czyli że trójkąt jest równoramienny więc ma oś symetrii która przechodzi przez wierzchołek B i środek podstawy AC.

$|AB| = \sqrt{\left(6-(-2)\right)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$

$|BC| = \sqrt{(10-6)^2 + \left(6-(-2)\right)^2} = \sqrt{4^2+8^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$ Tak więc trójkąt jest równoramienny. Teraz obliczymy współrzędne punktu D – środka odcinka AC

$x = \frac{-2+10}{2} = \frac{8}{2} = 4$ $\quad y = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$ $\quad D = (4;\ \ 4)$

Oś symetrii tego trójkąt przechodzi przez punkty: $B = (6;\ -2)$ $\quad D = (4;\ \ 4)$

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-2)}{4-6} = \frac{6}{-2} = -3$

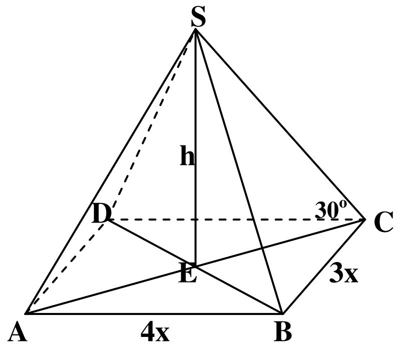
Szukana prosta ma postać $y = -3x + b$ i przechodzi przez $D = (4;\ \ 4)$

$4 = -3 \cdot 4 + b$ $\quad b = 4 + 12 = 16$

$y = -3x + 16$

Odpowiedź: Osią symetrii tego trójkąta jest prosta o równaniu $y = -3x + 16$

Zad 33. Oznaczając krawędzie podstawy jako 4x i 3x mamy:



$4x \cdot 3x = 192$

$12x^2 = 192 |:12$ $\quad x^2 = 16$

$x = \sqrt{16} = 4$ $\quad 4x = 4 \cdot 4 = 16$ $\quad 3x = 3 \cdot 4 = 12$

Krawędzie podstawy to 16 i 12.

Obliczymy długość przekątnej podstawy.

$12^2 + 16^2 = c^2$ $\quad c^2 = 144 + 256 = 400$

$c = \sqrt{400} = 20$ - długość przekątnej podstawy

$|CE| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$

$\tan 30° = \frac{h}{CE}$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{10}$

$3h = 10\sqrt{3} |:3$

$h = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$ $\quad V = \frac{1}{3} \cdot 192 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3}$

$V = \frac{1920\sqrt{3}}{9} = \frac{640}{3}\sqrt{3}$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa wynosi $\frac{640}{3}\sqrt{3}$

Zad 34. $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) > 0$ dla $x \in (0;\ \ 12)$ czyli miejsca zerowe funkcji to:

$x_1 = 0$ $\quad x_2 = 12$ oraz $p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+12}{2} = 6$

$q = 9$ - największa wartość funkcji

$f(x) = a(x-p)^2 + q$ - postać kanoniczna funkcji kwadratowej

$f(x) = a(x-6)^2 + 9$ Przekształcimy do postaci ogólnej

$f(x) = a(x^2 - 12x + 36) + 9$

$f(x) = ax^2 - 12ax + 36a + 9$ Już od początku wiemy że $x_1 = 0$ czyli wykres przechodzi przez $(0;\ \ 0)$ a z tego wynika że $c = 0$ (wyraz wolny wskazuje na punkt przecięcia z osią OY)

$36a + 9 = 0$ $\quad \Longrightarrow \quad 36a = -9 |:36$ $\quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{9}{36} = -\frac{1}{4}$

$b = -12a = -12 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{12}{4} = 3$

Mamy więc $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 0$

Odpowiedź: Współczynniki podanej funkcji kwadratowej to: $a = -\frac{1}{4};\ \ b = 3;\ \ c = 0$