Matura II termin czerwiec 2015r

Zadania zamknięte

Zad 1. $2\sqrt{18}-\sqrt{32}=2\sqrt{9\cdot 2}-\sqrt{16\cdot 2}=2\cdot 3\sqrt{2}-4\sqrt{2}=6\sqrt{2}-4\sqrt{2}=2\sqrt{2}=2^1\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{1+\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$ **(D)**

Zad 2. $\frac{\sqrt[5]{-32}\cdot 2^{-1}}{4}\cdot 2^2=\frac{-2\cdot\frac{1}{2}}{4}\cdot 4=-2\cdot\frac{1}{2}=-1$ **(D)**

Zad 3. $1{,}23x=45018|:1{,}23$ $\quad x=\frac{45018}{1{,}23}$ $\quad x=36600$ **(B)**

Zad 4. $3a^2-12ab+12b^2=3(a^2-4ab+4b^2)=3(a-2b)^2$ **(C)**

Zad 5. $\begin{cases}x+ay=5\\2x-y=3\end{cases}$ $x=2;\ \ y=1$ wstawmy do I równania $x=2;\ \ y=1$ i mamy:
$2+a\cdot 1=5$ $\quad a=5-2$ $\quad a=3$ **(D)**

Zad 6. $2x^2+11x+3=0$
$\Delta=11^2-4\cdot 2\cdot 3=121-24=97$ $\quad\sqrt{97}\approx 10$ korzystając z faktu że $\sqrt{97}<11$ otrzymamy oba pierwiastki ujemne **(D)**

Zad 7. $\sin 120°-\cos 30°=\sin(180°-120°)-\cos 30°=\sin 60°-\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0=\sin 0°$ **(C)**

Zad 8. $3\sin^3\alpha\cos\alpha+3\sin\alpha\cos^3\alpha=3\sin\alpha\cos\alpha\,(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=3\sin\alpha\cos\alpha\cdot 1$ **(B)**

Zad 9. Mamy dane punkty $A=(0;\ \ -2)$ $\quad B=(6;\ \ 2)$. $b=-2$ bo jest to punkt przecięcia z osią OY $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-(-2)}{6-0}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. **(A)**

Zad 10. $y=-3x$ $\quad A=(0;\ \ 6)$ czyli szukana prosta ma współczynnik kierunkowy jak dana bo mają być równoległe $a=-3$ $\quad b=6$ – punkt przecięcia z osią OY dostajemy więc wzór na prostą k
$y=-3x+6$ Pytanie jest punkt przecięcia z osią OX czyli $-3x+6=0$
$=-3x=-6|:(-3)$ $\quad x=2$ $\quad (2;\ \ 0)$ **(C)**

Zad 11. $x^2(x+5)(2x-3)(x^2-7)=0$ Pierwiastki niewymierne otrzymamy tylko z $x^2-7=0$
$\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)=0$
$x_1=\sqrt{7}$ $\quad x_2=-\sqrt{7}$ czyli 2 sztuki **(D)**

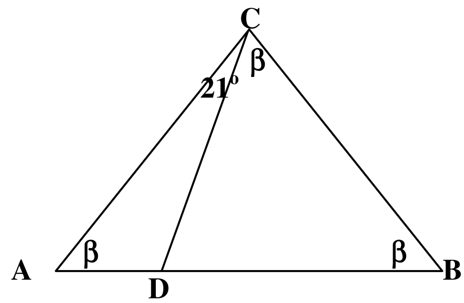
Zad 12. Funkcja rośnie od $f(5)=-1$ $f(6)=1$ Czyli rośnie dla $x\in\langle 5;\ \ 6\rangle$ **(C)**

Zad 13. $a_n=2^n$ $\quad a_1=2^1=2$ $\ a_2=2^2=4$ $\quad q=\frac{4}{2}=2$
$S_{10}=a_1\frac{1-q^{10}}{1-q}=2\cdot\frac{1-2^{10}}{1-2}=2\cdot\frac{1-2^{10}}{-1}=-2(1-2^{10})$ **(B)**

Zad 14. $a_1+a_6=a_1+a_1+5r=2a_1+5r=13$
$a_3+a_4=a_1+2r+a_1+3r=2a_1+5r=13$ **(A)**

Zad 15. $3x+4x+5x=180°$ z sumy miar kątów w trójkącie
$12x=180°|:12$ $\quad x=15°$ $\quad 3x=3\cdot 15°=45°$ **(A)**

Zad 16. Trójkąty ABC i BCD są równoramienne.
Tak więc $|\sphericalangle\beta|+|\sphericalangle\beta|+|\sphericalangle\beta|+21°=180°$
więc $3|\sphericalangle\beta|=180°-21°$
$3|\sphericalangle\beta|=159°|:3$ $\quad|\sphericalangle\beta|=53°$ **(B)**



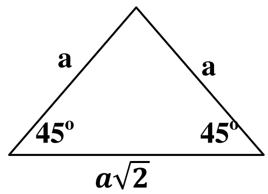
Zad 17. $a=7;\ \ b=2$ Zgodnie z warunkiem trójkąta,
trzeci bok ***c*** musi być większy od 5 oraz mniejszy od 9 a ten warunek spełnia $c=6$ **(C)**

Zad 18. $a=20;\quad b=12\quad\alpha=120°$
$P=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 12\cdot\sin 120°=10\cdot 12\cdot\sin(180°-120°)=120\cdot\sin 60°=$
$=120\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=60\sqrt{3}$ **(C)**

Zad 19. Jeżeli $r=3$ to $d=2r=6$ średnica podstawy. Tak więc przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o bokach 6 $\alpha=60°$ **(C)**

Zad 20. Graniastosłup o podstawie ośmiokąta ma 16 wierzchołków (8 na dole i 8 na górze) oraz 24 krawędzie po 8 w podstawach i 8 bocznych **(A)**

Zad 21. Wykonując przekrój wzdłuż krawędzi bocznych i przekątnej podstawy otrzymujemy trójkąt:
Przekątna podstawy jako przekątna kwadratu ma długość $a\sqrt{2}$
Tak więc kąty krawędzi bocznych z podstawą mają po 45°



(B)

Zad 22.
$\frac{5}{16} = 0{,}3125 \qquad 0{,}3125 - 0{,}3 = 0{,}0125$ błąd bezwzględny.
błąd względny$= \frac{0{,}0125}{0{,}3125} \cdot 100\% = \frac{1{,}25}{0{,}3125}\% = 4\%$ **(A)**

Zad 23. $\begin{cases} \frac{2+4+7+8+x}{5} = n \\ \frac{2+4+7+8+x+2x}{6} = 2n \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{21+x}{5} = n | \cdot 5 \\ \frac{21+3x}{6} = 2n | \cdot 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 21 + x = 5n \\ 21 + 3x = 12n \end{cases}$ Z I równania $\quad x = 5n - 21$

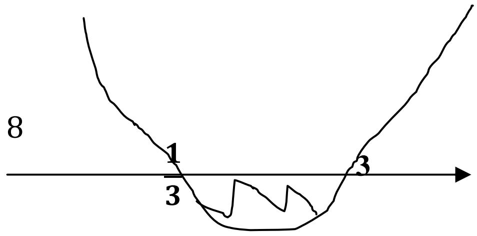
II równanie: $21 + 3(5n - 21) = 12n$
$21 + 15n - 63 = 12n$
$15n - 12n = 63 - 21 \qquad 3n = 42 | :3 \qquad n = 14$
$x = 5 \cdot 14 - 21 = 70 - 21 = 49$ **(A)**

Zad 24. Liczby dwucyfrowe podzielne przez 6. Można ich policzyć na piechotę bo jest ich tylko 15 a można za pomocą wzoru na ciąg arytmetyczny $a_1 = 12 \quad r = 6 \quad a_n = 96$
$a_n = a_1 + (n-1)r \qquad 96 = 12 + (n-1)6 \qquad 96 = 12 + 6n - 6$
$6n = 96 - 6 \qquad 6n = 90 | :6 \qquad n = 15$
Teraz trzeba policzyć liczby podzielne jednocześnie przez 6 i przez 9.
Najmniejszą taka liczbą jest 18 oraz jej wielokrotności czyli 36, 54, 72, 90. – jest ich 5.
Teraz zostało wykonać odejmowanie $15 - 5 = 10$ **(B)**

Zad 25. $\bar{\bar{\Omega}} = 100 \quad \bar{\bar{A}} = 4 \qquad P(A) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ Po kupieniu ***n*** losów i jednego wygrywającego mamy:
$\bar{\bar{A}} = 3 \qquad P(A) = \frac{1}{25} \qquad \frac{1}{25} = \frac{3}{x} \qquad x = 75 \qquad n = 100 - 75 = 25$ **(D)**

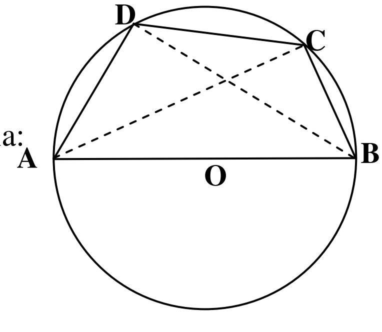
<u>Zadania otwarte</u>

Zad 26. $3x^2 - 9x \le x - 3$
$3x^2 - 9x - x + 3 \le 0$
$3x^2 - 10x + 3 \le 0$
$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100 - 36 = 64 \qquad \sqrt{64} = 8$
$x_1 = \frac{10-8}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{10+8}{2 \cdot 3} = \frac{18}{6} = 3$
$x_1 = \frac{1}{3} \qquad x_2 = 3$
Odp: $x \in \langle \frac{1}{3}; \quad 3 \rangle$



Zad 27. $x(x^2 - 2x + 3) = 0$
$x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 2x + 3 = 0$
$x_1 = 0 \qquad \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8 < 0 \quad x^2 - 2x + 3 = 0$ - nie ma pierwiastków
Jedynym rozwiązaniem tego równania jest $x_1 = 0$

Zad 28. Zgodnie z warunkami zadania AB jest średnicą.
Kąty $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = 90°$ jako kąty wpisane oparte na półokręgu:
Czyli inaczej mówiąc trójkąty ADB i ACB są prostokątne.
Korzystając więc z Twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy tezę zadania:
$AD^2 + DB^2 = AB^2$ oraz $AC^2 + CB^2 = AB^2$ czyli
$AD^2 + DB^2 = AC^2 + CB^2$



Zad 29. $3x^2 + 5y^2 - 4xy \ge 0$
$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x^2 + y^2 \ge 0$

$(x-2y)^2+2x^2+y^2 \geq 0$ Otrzymaliśmy sumę kwadratów liczb. Kwadrat liczby jest nieujemny i suma kwadratów też jest nieujemna ***co należało udowodnić***.

Zad 30. $A=(-1;\ \ 3)$ oraz dany jest $(p;\ \ q)=(-3;\ \ 4)$ wierzchołek wykresu funkcji

Korzystając ze wzoru na postać kanoniczną funkcji kwadratowej $f(x)=a(x-p)^2+q$ mamy:

$f(x)=a(x+3)^2+4$ wstawiając do wzoru dany punkt $A=(-1;\ \ 3)$ otrzymujemy

$3=a(-1+3)^2+4$ $\qquad$ $3=a\cdot 2^2+4$

$3=4a+4$ $\qquad$ $-4a=4-3$ $\qquad$ $-4a=1|:(-4)$

$a=-\frac{1}{4}$ $\qquad$ $f(x)=-\frac{1}{4}(x+3)^2+4$ – postać kanoniczna szukanej funkcji

$-\frac{1}{4}(x+3)^2+4=-\frac{1}{4}(x^2+6x+9)+4=-\frac{1}{4}x^2-\frac{6}{4}x-\frac{9}{4}+4=-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+1\frac{3}{4}$

$f(x)=-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+1\frac{3}{4}$ – postać ogólna szukanej funkcji kwadratowej.

Zad 31. Ilość liczb dwucyfrowych $\overline{\overline{\Omega}}=99-9=90$

Liczby podzielne przez 8 Ilość obliczymy stosując wzór na wyraz n-ty ciągu arytmetycznego:
(można też to wyliczyć na piechotę przez wypisywanie)

$a_1=16$ $\quad$ $r=8$ $\quad$ $a_n=96$ $\quad$ $a_n=a_1+(n-1)r$

$96=16+(n-1)8$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $96=16+8n-8$

$-8n=-96+8$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $-8n=-88|:(-8)$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $n=11$

Liczby podzielne przez 12 $\{\mathbf{12};\ \ 24;\ \ \mathbf{36};\ \ 48;\ \ \mathbf{60};\ \ 72;\ \ \mathbf{84};\ \ 96\}$ z czego 4 są jednocześnie podzielne przez 8. Tak więc łączna liczba liczb o które chodzi w zadaniu to $\overline{\overline{A}}=11+4=15$

$P(A)=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu ze zbioru liczb dwucyfrowych liczby podzielnej przez 8 lub 12 wynosi $\frac{1}{6}$.

Zad 32. Ciąg arytmetyczny: $a_5=18$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $a_1+4r=18$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $a_1=18-4r$

$a_1;\ \ a_3;\ \ a_{13}$ ciąg geometryczny

$\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_{13}}{a_3}$ $\qquad$ $a_3^2=a_1\cdot a_{13}$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $(a_1+2r)^2=a_1(a_1+12r)$

$(18-4r+2r)^2=(18-4r)(18-4r+12r)$

$(18-2r)^2=(18-4r)(18+8r)$

$324-72r+4r^2=324+144r-72r-32r^2$

$4r^2+32r^2-72r+72r-144r+324-324=0$

$36r^2-144r=0|:36$

$r^2-4r=0$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $r(r-4)=0$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $r_1=0$ $\quad\vee\quad$ $r_2-4=0$ $\qquad$ $r_2=4$

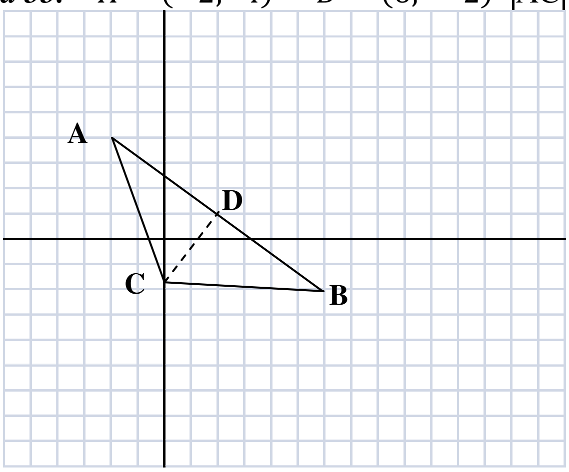
$r_1=0$ niezgodne z założeniem bo ciąg ma być rosnący.

$r=4$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $a_1=18-4r$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $a_1=18-4\cdot 4=18-16=2$

$a_n=a_1+(n-1)r=2+(n-1)4=2+4n-4=4n-2$

Odpowiedź: wzór na n-ty wyraz ciągu to: $a_n=4n-2$

Zad 33. $A=(-2;\ \ 4)$ $\quad$ $B=(6;\ \ -2)$ $|AC|=|BC|$ $\quad$ $C=(0;\ \ y)$



Obliczmy współrzędne środka odcinka AB

$x=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=2$ $\qquad$ $y=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}=1$ $\qquad$ $D=(2;\ \ 1)$ – środek odcinka AB.

Obliczmy współczynnik kierunkowy prostej AB:

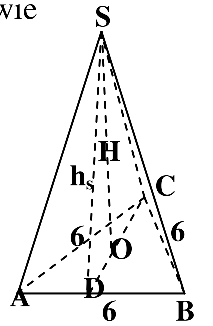
$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-4}{6-(-2)} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$ Prosta CD jest prostopadła do AB bo na niej leży wysokość trójkąta ABC. $a_1 = \frac{4}{3}$ $\left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = -1\right)$ Prosta CD ma postać $y = \frac{4}{3}x + b$ i przechodzi przez $D = (2;\ 1)$.

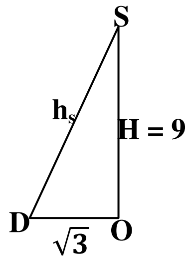
$1 = \frac{4}{3} \cdot 2 + b$ $\qquad 1 = \frac{8}{3} + b$ $\qquad b = 1 - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3}$

Prosta CD ma wzór $y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$ Wiadomym jest że prosta przecina oś OY w punkcie $(0;\ b)$. Tak więc punkt C ma współrzędne $C = \left(0;\ -\frac{5}{3}\right)$

Odpowiedź: Współrzędne punktu $C = \left(0;\ -\frac{5}{3}\right)$

Zad 34. $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \cdot H = 27\sqrt{3}$ $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ - wysokość w podstawie





$V = \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot H = 27\sqrt{3}$

$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot H = 27\sqrt{3}$ gdzie a = 6

$\frac{6^2\sqrt{3}}{12} \cdot H = 27\sqrt{3} | : \sqrt{3}$

$\frac{36}{12} \cdot H = 27 \quad \Longrightarrow \quad 3H = 27 | : 3 \quad \Longrightarrow \quad H = 9$

Wiadomym jest że: $DO = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Teraz z Twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DOS mamy:

$\sqrt{3}^2 + 9^2 = {h_s}^2 \quad \Longrightarrow \quad 3 + 81 = {h_s}^2$

${h_s}^2 = 84 \quad \Longrightarrow \quad h_s = \sqrt{84} = \sqrt{4 \cdot 21} = 2\sqrt{21}$

$P_{pc} = \frac{1}{2}a \cdot h + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{21} =$

$= \frac{36\sqrt{3}}{4} + 18\sqrt{21} = 9\sqrt{3} + 18\sqrt{21} = 9\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{21}\right)$

Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa wynosi $9\sqrt{3} + 18\sqrt{21} = 9\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{21}\right)$