Maj 2015 rok poziom podstawowy

Zadania zamknięte

Zad 1. $-4 \leq x-1 \leq 4$

mamy tu dwie nierówności $-4 \leq x-1$ oraz $x-1 \leq 4$

1) $-4 \leq x-1 \quad \Rightarrow \quad -4+1 \leq x \quad \Rightarrow \quad -3 \leq x$

2) $x-1 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad x \leq 4+1 \quad \Rightarrow \quad x \leq 5$ **(C)**

Zad 2. $abc = -\frac{1}{27} \cdot \log_{\frac{1}{4}} 64 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 27 = -\frac{1}{27} \cdot (-3) \cdot (-3) = -\frac{1}{27} \cdot 9 = -\frac{1}{3}$

$\log_{\frac{1}{4}} 64 = x \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{4}\right)^x = 64 \quad \Rightarrow \quad x = -3$

$\log_{\frac{1}{3}} 27 = x \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = 27 \quad \Rightarrow \quad x = -3$ **(B)**

Zad 3. $1000\left(1 + \frac{81}{100} \cdot \frac{4}{100}\right)$ Po roku dostajemy więcej niż wpłaciliśmy więc we wzorze musi być + a nie –. Podatek od naliczonego procentu wynosi $19\% = \frac{19}{100}$ więc $\left(1 - \frac{19}{100}\right) \cdot 4\% = \frac{81}{100} \cdot \frac{4}{100}$ **(C)**

Zad 4. $\frac{m}{5-\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{5}$ wymnażając proporcję na krzyż mamy

$5m = (5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})$

$5m = 25 - 5 \quad \Rightarrow \quad 5m = 20 \quad \Rightarrow \quad m = 4$ **(B)**

Zad 5. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 0{,}5y = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} -y = -x + 3 | \cdot (-1) \\ 0{,}5y = -2x + 4 | \cdot 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = x - 3 \\ y = -4x + 8 \end{cases}$

równania przedstawiają proste o różnych współczynnikach kierunkowych więc są to proste nierównoległe czyli przecinają się w jednym punkcie. **(B)**

Zad 6. $(x+3)(x+7)(x-11) = 0$

$x+3=0 \ \vee \ x+7=0 \ \vee \ x-11=0$

$x_1 = -3 \quad x_2 = -7 \quad x_3 = 11 \qquad -3 + (-7) + 11 = 11 - 10 = 1$ **(C)**

Zad 7. $\frac{x-1}{x+1} = x - 1$ Rozwiązywanie zgadywaniem dopasowując odpowiedzi jest tu ryzykowne bo łatwo wpaść w pułapkę że może (A) albo (B) jest odpowiedzią. Tylko porządne rozwiązanie prowadzi do prawdziwej odpowiedzi.

$\frac{x-1}{x+1} = x - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{x+1} - (x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{x+1} - \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = 0 \qquad x \neq -1$

$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x^2-1}{(x+1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1-x^2+1}{x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-x^2+x}{x+1} = 0$

$-x^2 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(-x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ \vee \ -x+1 = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$ **(D)**

Zad 8. Widzimy że punkt $(0;\ -2)$ nie należy do wykresu (kółeczko). Co prawda punkt $(0;\ 2)$ też nie należy do wykresu ale wartości 2 są dla dowolnych ***x*** z przedziału $(0;\ 1\rangle$ **(D)**

Zad 9. $f(x) = (m-1)x + 3 \quad S = (5;\ -2)$

$-2 = (m-1)5 + 3 \quad \Rightarrow \quad -2 = 5m - 5 + 3 \quad \Rightarrow \quad -5m = -2 + 2 \quad \Rightarrow \quad -5m = 0$

$m = 0$ **(B)**

Zad 10. $f(x) = 2x + b \qquad g(x) = -3x + 4$

Miejsce zerowe funkcji ***g:*** $-3x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x = -4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-4}{-3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3}$

Miejsce zerowe funkcji ***f***: $2 \cdot \frac{4}{3} + b = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{3} + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{8}{3}$ **(C)**

Zad 11. $f(x) = x^2 + x + c \quad f(3) = 4 \quad 3^2 + 3 + c = 4$

$9 + 3 + c = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 4 - 9 - 3 \quad \Rightarrow \quad c = -8$

$f(x) = x^2 + x - 8$

$f(1) = 1^2 + 1 - 8 = 2 - 8 = -6$ **(A)**

Zad 12. $\frac{2}{7} < \frac{x}{14} < \frac{4}{3}$ wspólny mianownik dla 7; 14; 3 to 42

$\frac{2 \cdot 6}{7 \cdot 6} < \frac{x \cdot 3}{14 \cdot 3} < \frac{4 \cdot 14}{3 \cdot 14}$

$\frac{12}{42} < \frac{3x}{42} < \frac{56}{42} \quad 12 < 3x \quad \Rightarrow \quad 4 < x \qquad 3x < 56 \quad \Rightarrow \quad x < 18\frac{2}{3}$

$x \in \{5;\ 6;\ 7;\ \cdots;17;\ 18\} \quad 18 - 4 = 14$ **(A)**

Zad 13. $a_4 = 3a_1 \quad a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad q^3 = 3 \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[3]{3}$ **(C)**

Zad 14. $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$ **(D)**

Zad 15. $\tan\alpha = 2\sin\alpha$ wiemy że: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\sin\alpha \mid \cdot \cos\alpha$

$\sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \mid : 2\sin\alpha$

$\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{1}{2}$ **(A)**

Zad 16. kąt wpisany – α

kąt środkowy – 2α (kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego)

$\alpha + 20° = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 20°$ **(C)**

Zad 17. Rąb – obwód = ***4a***

$4a = 8 \quad \Rightarrow \quad a = 2$

$P = a \cdot a \cdot \sin\alpha \qquad 1 = 2 \cdot 2 \cdot \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad 1 = 4 \cdot \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{1}{4}$

$\alpha \approx 14{,}5°$ - odczytane z tablic **(A)**

Zad 18. $y = m^2x + 3 \qquad y = (4m-4)x - 3$ są równoległe czyli:

$m^2 = 4m - 4$

$m^2 - 4m + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (m-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 2$ **(A)**

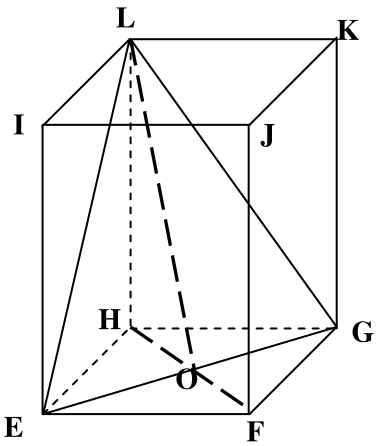
Zad 19. $y = 2mx - m^2 - 1 \qquad y = 4m^2x + m^2 + 1$ - prostopadłe

$2m \cdot 4m^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad 8m^3 = -1 \quad \Rightarrow \quad m^3 = -\frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$ **(A)**

Zad 20. $M = (-2;\ 1) \quad N = (-1;\ 3) \quad K = \left(\frac{-2+(-1)}{2};\ \frac{1+3}{2}\right) \qquad K = \left(-\frac{3}{2};\ 2\right)$

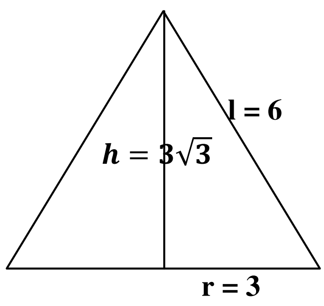
$K' = \left(\frac{3}{2};\ -2\right)$ **(D)**

Zad 21.



$\sphericalangle HOL$ **(A)**

Zad 22.



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi 3^2 \cdot 3\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3\sqrt{3}\pi = 9\sqrt{3}\pi$ **(B)**

Zad 23. $a = H = 8$ krawędź podstawy oraz wysokość graniastosłupa

$h_p = \frac{8\sqrt{3}}{2}$ wysokość trójkąta równobocznego w postawie

$P_{pc} = 3 \cdot a \cdot H + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_p = 3 \cdot 8 \cdot 8 + 8 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} = 8 \cdot 8\left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8^2\left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **(D)**

Zad 24. $Śr = \frac{2+4+7+8+9}{5} = \frac{30}{5} = 6$ więc $x = 6$ gdyż nie zmienia średniej **(D)**

Zad 25. $\Omega = \{ccc;\ ccz;\ czc;\ zcc;\ czz;\ zzc;\ zcz;\ zzz;\ \}$ $A = \{ccz;\ czc;\ zcc\}$ $P(A) = \frac{3}{8}$ **(B)**

Zadania otwarte

Zad 26. $2x^2 - 4x > (x+3)(x-2)$

$2x^2 - 4x > x^2 - 2x + 3x - 6$

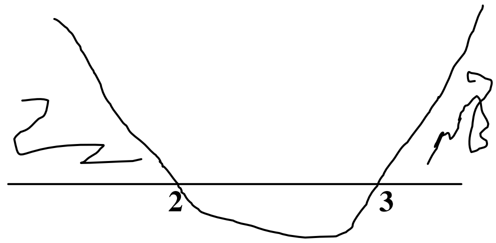
$2x^2 - x^2 - 4x + 2x - 3x + 6 > 0$

$x^2 - 5x + 6 > 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 \qquad \sqrt{1} = 1$

$x_1 = \frac{5-1}{2\cdot 1} = \frac{4}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{5+1}{2\cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$

Odpowiedź $x \in (-\infty;\ \ 2) \cup (3;\ \ +\infty)$



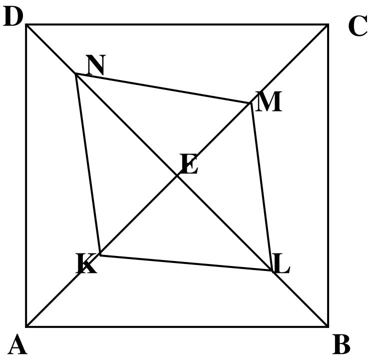
Zad 27. $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$

$4x^2 - 8xy + 5y^2 = 4x^2 - 8xy + 4y^2 + y^2 = (2x - 2y)^2 + y^2$

lewa strona została przedstawiona jako suma kwadratów liczb kwadrat liczby jest liczbą nieujemną tak samo suma liczb nieujemnych jest nieujemna więc:

$$4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$$

Zad 28.



Przyjmijmy $|AC| = |BD| = x$. Pole kwadratu ABCD $P_1 = \frac{|AC|\cdot|BD|}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$

zgodnie z warunkami zadania $|KM| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}x$ $|LN| = \frac{2}{3}|BD| = \frac{2}{3}x$

Pole rombu KLMN $P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{2}{3}x = \frac{2}{12}x^2 = \frac{1}{6}x^2$

$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{1}{6}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{3} = 1:3$

Zad 29. $f(x) = x^2 - 6x + 3 \quad x \epsilon \langle 0;\ \ 4\rangle$

$f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 3 = 3 \qquad f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 3 = 16 - 24 + 3 = -5$

Należy jeszcze sprawdzić czy wierzchołek $(p;\ \ q)$ leży w podanym przedziale

$p = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2\cdot 1} = 3 \qquad q = f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = 9 - 18 + 3 = -6$

Odp: Tak więc wartość największa to $f(0) = 3$ a wartość najmniejsza to $q = f(3) = -6$

Zad 30. $A = (-43;\ \ -12) \qquad B = (50;\ \ 19)$

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{19-(-12)}{50-(-43)} = \frac{19+12}{50+43} = \frac{31}{93} = \frac{1}{3}$

wzór prostej AB ma postać $y = \frac{1}{3}x + b$. Wstawmy do wzoru punkt $B = (50;\ \ 19)$

$19 = \frac{1}{3} \cdot 50 + b \quad \Longrightarrow \quad 19 = \frac{50}{3} + b \quad \Longrightarrow \quad 19 = 16\frac{2}{3} + b \quad \Longrightarrow \quad b = 19 - 16\frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad b = 2\frac{1}{3}$

$y = \frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$ Mamy obliczyć pierwszą współrzędną punktu przecięcia z OX czyli y = 0

$0 = \frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3} \ | \cdot 3$

$0 = x + 7 \qquad \Longrightarrow \qquad -x = 7 \qquad \Longrightarrow \qquad x = -7$

Odpowiedź: $x = -7$

Zad 31. $\frac{x}{y}$ licznik i mianownik szukanego ułamka

Warunki zadania prowadzą do równań: $\frac{x + \frac{1}{2}x}{y + \frac{1}{2}x} = \frac{4}{7}$ oraz $\frac{x+1}{y+1} = \frac{1}{2}$

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} \frac{x+\frac{1}{2}x}{y+\frac{1}{2}x} = \frac{4}{7} \\ \frac{x+1}{y+1} = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} 7\left(x+\frac{1}{2}x\right) = 4\left(y+\frac{1}{2}x\right) \\ 2(x+1) = 1(y+1) \end{cases}$

$\begin{cases} 7x + 3{,}5x = 4y + 2x \\ 2x + 2 = y + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 10{,}5x - 2x = 4y \\ 2x + 2 - 1 = y \end{cases}$

$\begin{cases} 8{,}5x = 4y \\ 2x + 1 = y \end{cases}$

wstawiam II równanie do I

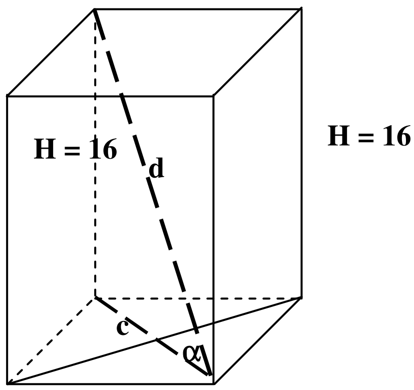
$8{,}5x = 4(2x+1)$

$8{,}5x = 8x + 4 \quad \Rightarrow \quad 8{,}5x - 8x = 4 \quad \Rightarrow \quad 0{,}5x = 4| \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad x = 8$

$y = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \cdot 8 + 1 \quad \Rightarrow \quad y = 17$

$\begin{cases} x = 8 \\ y = 17 \end{cases}$ Odpowiedź: Szukany ułamek to $\frac{8}{17}$

Zad 32.



$\cos\alpha = \frac{3}{5} = \frac{c}{d}$ można więc przyjąć oznaczenia $c = 3x \quad d = 5x$

Z twierdzenia pitagorasa mamy $(3x)^2 + 16^2 = (5x)^2$

$9x^2 + 256 = 25x^2 \quad \Rightarrow \quad 25x^2 - 9x^2 = 256 \quad \Rightarrow \quad 16x^2 = 256|:16$

$x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{16} = 4$

$c = 3x = 3 \cdot 4 = 12$ - przekątna podstawy (kwadratu)

$c = a\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{2}$

$a = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

$P_{pc} = 4 \cdot a \cdot H + 2a^2 = 4 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 16 + 2\left(6\sqrt{2}\right)^2 = 384\sqrt{2} + 2 \cdot 36 \cdot 2 = 384\sqrt{2} + 144 = 48\left(8\sqrt{2}+3\right)$

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa wynosi $48\left(8\sqrt{2}+3\right)$

Zad 33. Liczba osób ankietowanych $\overline{\overline{\Omega}}$ – 115

bilety normalne – 41

bilety ulgowe – 76

osoby kupujące oba bilety – 27

$41 + 76 - 27 = 90$ – osoby które kupiły jakikolwiek bilet

$\overline{\overline{A}} = 115 - 90 = 25$ – osoby które nie kupiły żadnego biletu.

$P(A) = \frac{25}{115} = \frac{5}{23}$

Zad 34. $a_3 = a_1 + 2r \quad a_9 = a_1 + 8r$

$\frac{a_1 + a_3 + a_9}{3} = 12 \quad \Rightarrow \quad a_1 + a_3 + a_9 = 36$

$a_1 + a_1 + 2r + a_1 + 8r = 36$

$3a_1 + 10r = 36$ - I równanie
$S_{11} = \frac{a_1+a_{11}}{2} \cdot 11 = 187$ - Suma jedenastu wyrazów ciągu arytmetycznego
$\frac{a_1+a_1+10r}{2} \cdot 11 = 187$
$\frac{2a_1+10r}{2} \cdot 11 = 187$
$(a_1 + 5r)11 = 187|:11$
$a_1 + 5r = 17$ - II równanie. Można więc rozwiązać układ równań:
$$\begin{cases} 3a_1 + 10r = 36 \\ a_1 + 5r = 17| \cdot (-3) \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3a_1 + 10r = 36 \\ -3a_1 - 15r = -51 \end{cases} | +$$
$10r - 15r = 36 - 51$
$-5r = -15 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{-15}{-5} \quad \Longrightarrow \quad r = 3$

$$\begin{cases} 3a_1 + 10r = 36 \\ a_1 + 5r = 17| \cdot (-2) \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3a_1 + 10r = 36 \\ -2a_1 - 10r = -34 \end{cases} | +$$
$a_1 = 36 - 34 = 2$
Otrzymany ciąg arytmetyczny to $\{2; \quad 5; \quad 8; \quad 11; \ \cdots\}$ $a_n = 2 + (n-1)3 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$
Ciąg $\{2; \quad 8; \quad a_k = b_3\}$ - geometryczny $q = \frac{8}{2} = 4$
$\frac{a_k}{8} = 4 \quad \Longrightarrow \quad a_k = 4 \cdot 8 = 32$
$a_k = 3k - 1 = 32 \quad \Longrightarrow \quad 3k = 32 + 1 \quad \Longrightarrow \quad 3k = 33 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{33}{3} \quad \Longrightarrow \quad k = 11$
$a_{11} = b_3$
Odpowiedź 11 wyraz ciągu arytmetycznego jest trzecim wyrazem ciągu geometrycznego.