Przed nową formułą (poziom podstawowy)
Listopad 2014 (Operon)
Zadania zamknięte

Zad 1. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{2-1} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{1} = \sqrt{10}+\sqrt{5}$ **(B)**

Zad 2. $f(x) = \begin{cases} x^2-1 \quad dla\ x \in (-\infty;\ -2\rangle \\ -\frac{1}{3}x+1\ dla\ x \in (-2;\ 3) \\ 2x-8\ \ dlax \in \langle 3;\ \ +\infty) \end{cases}$ Proponowane odpowiedzi $-1\ oraz\ 1$ tyczą się wzoru środkowego bo $-1\ i\ 1\ \in (-2;\ 3)$ oczywiście wstawiając je do tego wzoru nie dają 0.
Odpowiedzi $3\ i\ 4$ tyczą się wzoru dolnego bo $3\ i\ 4\ \in \langle 3;\ \ +\infty)$ Rozwiązując równanie $2x-8=0$ mamy $x=4$ **(D)**

Zad 3. $a = \frac{(2^3)^4}{2^{-5}} = \frac{2^{12}}{2^{-5}} = 2^{12-(-5)} = 2^{12+5} = 2^{17}$ **(D)**

Zad 4. $\boldsymbol{x}$ – cena początkowa
1) obniżka o 10%: $x - 10\%x = x - 0{,}1x = 0{,}9x$
2) kolejna obniżka o 15%: $0{,}9x - 15\% \cdot 0{,}9x = 0{,}9x - 0{,}15 \cdot 0{,}9x = 0{,}9x - 0{,}135x = 0{,}765x$
Cena końcowa to $0{,}765x = 76{,}5\%x$
$100\% - 76{,}5\% = 23{,}5\%$ **(A)**

Zad 5. $x = \frac{2}{3} = 0{,}666\cdots \approx 0{,}67$
Błąd względny: $\frac{0{,}67-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} \cdot 100\% = \frac{\frac{67}{100}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} \cdot 100\% = \frac{\frac{201}{300}-\frac{200}{300}}{\frac{2}{3}} \cdot 100\% = \frac{1}{300} \cdot \frac{3}{2} \cdot 100\% = \frac{1}{2}\%$ **(A)**

Zad 6. $f(x) = \frac{a}{x} \qquad A = \left(-\frac{1}{4};\ \ 8\right)$
$8 = \frac{a}{-\frac{1}{4}} | \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \qquad a = 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -2$ **(B)**

Zad 7. $6x + 10y + 7 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 10y = -6x - 7$
$y = -\frac{6}{10}x - \frac{7}{10}$ czyli współczynnik kierunkowy tej prostej $a = -\frac{6}{10}$ to prosta prostopadła ma współczynnik kierunkowy $a = -\frac{1}{-\frac{6}{10}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ **(D)**

Zad 8. $S_n = 5n^2 - 7n$
$S_1 = 5(1)^2 - 7 \cdot 1 = 5 - 7 = -2 = a_1$ suma jednego wyrazu czyli a_1
$S_2 = 5(2)^2 - 7 \cdot 2 = 5 \cdot 4 - 14 = 20 - 14 = 6 = a_1 + a_2$ suma dwóch wyrazów.
$a_1 + a_2 = 6$ czyli $-2 + a_2 = 6 \qquad \Longrightarrow \qquad a_2 = 6 + 2 = 8$ **(C)**

Zad 9. W trzycyfrowej liczbie na pierwszym miejscu może być 9 różnych cyfr od 1 do 9. Na drugim miejscu już nie będzie tej cyfry co była na pierwszym ale dodatkowo może być 0 więc też 9. Na trzecim miejscu nie może być cyfra z miejsca I jak i z II więc 8.
Odp: $9 \cdot 9 \cdot 8$ **(B)**

Zad 10. $(x+7)(x+1) = 0$
$x + 7 = 0 \quad \vee \quad x + 1 = 0$
$x_1 = -7 \qquad x_2 = -1$ różnica pierwiastków: $-1 - (-7) = -1 + 7 = 6$ **(C)**

Zad 11. $W = \frac{16x^2-25}{16x^2+40x+25} = \frac{(4x-5)(4x+5)}{(4x+5)^2} = \frac{(4x-5)(4x+5)}{(4x+5)(4x+5)} = \frac{4x-5}{4x+5}$ **(A)**

Zad 12. $f(x) = \frac{1}{x^2+4x}$ Trzeba zbadać dla jakich $\boldsymbol{x}$ mianownik daje 0;
$x^2 + 4x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x(x+4) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0 \quad \vee \quad x + 4 = 0$
$x_1 = 0 \quad x_2 = -4 \quad D = R\backslash\{-4;\ \ 0\}$ **(C)**

Zad 13. $f(x) = -x^2 - 4x + 5$ zbiór wartości to $(-\infty;\ \ q\rangle$ bo mamy gałęzie do dołu.
$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[(-4)^2-4\cdot(-1)\cdot 5]}{4\cdot(-1)} = \frac{-(16+20)}{-4} = \frac{-36}{-4} = 9$ ZbW= $(-\infty;\ \ 9\rangle$ **(D)**

Zad 14. $81 + x^3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x^3 = -81 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \sqrt[3]{-81} = -3$ **(C)**

Zad 15. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\Rightarrow$ $\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$ $\Rightarrow$ $\cos\alpha = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$ gdyby kąt był kątem ostrym.

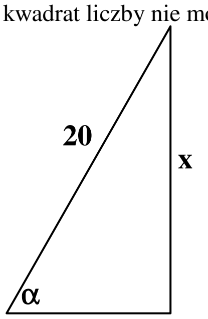
Jeżeli kat jest rozwarty to $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ **(D)**

Zad 16. $10^{-\frac{5}{3}}$ Liczba przeciwna to liczba z przeciwnym znakiem czyli $-10^{-\frac{5}{3}}$ **(D)**

Zad 17. $f(x) = 3^x$ przesunięcie wzdłuż osi OY o 3 w dół czyli dodanie do wartości liczby – 3 więc $y = 3^x - 3$ (gdyby to było przesunięcie względem OX to by było **D**) **(A)**

Zad 18. $(x-5)^2 \le 0$ Liczba 5 spełnia tą nierówność $[(5-5)^2 = 0]$. Gdyby była to nierówność $(x-5)^2 < 0$ to nie ma liczby spełniającej tą nierówność, bo kwadrat liczby nie może być ujemny **(D)**

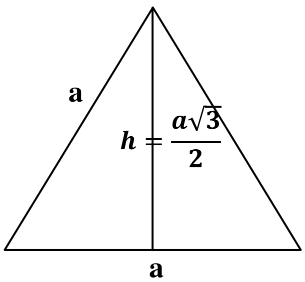
Zad 19.



$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ i $\sin\alpha = \frac{x}{20}$ $\Rightarrow$ $\frac{3}{5} = \frac{x}{20}$

$5x = 3 \cdot 20$ $\Rightarrow$ $5x = 60$ $\Rightarrow$ $x = 12$ **(B)**

Zad 20.



$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = a - 4$

$\frac{a\sqrt{3}}{2} = a - 4 | \cdot 2$ $\Rightarrow$ $a\sqrt{3} = 2a - 8$

$a\sqrt{3} - 2a = -8$ $\Rightarrow$ $a(\sqrt{3} - 2) = -8$

$a = \frac{-8}{\sqrt{3}-2} = \frac{8}{2-\sqrt{3}} = \frac{8(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})} = \frac{8(2+\sqrt{3})}{4-3} = \frac{8(2+\sqrt{3})}{1} = 8(2+\sqrt{3})$ **(A)**

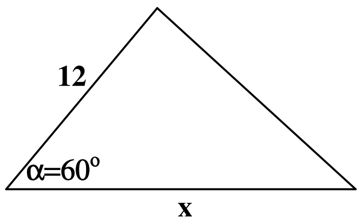
Zad 21.

$P = 18\sqrt{3}$

$P = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot x \cdot \sin 60°$

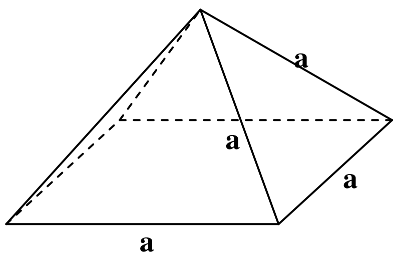
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

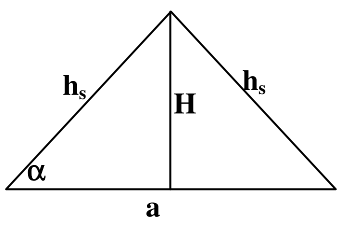
$\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$



$6 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $3\sqrt{3}x = 18\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $x = \frac{18\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 6$ **(B)**

Zad 22.





W przekroju wzdłuż wysokości ścian bocznych uzyskujemy trójkąt równoramienny o podstawie a i ramionach $h_s = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + H^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad H^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{1a^2}{4} = \frac{2a^2}{4}$

$H = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ **(C)**

Zad 23.

Przekrój jest kwadratem czyli $h = 2r \quad r = \frac{1}{2}h$

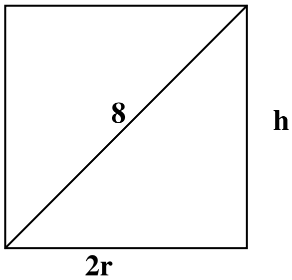
znając wzór na przekątną kwadratu mamy:

$h\sqrt{2} = 8 \ \Longrightarrow \ h = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

$r = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi\left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot 4\sqrt{2} = \pi \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4\sqrt{2} = 32\sqrt{2}\pi$ **(D)**



Zad 24.

$\sphericalangle CAB = 90° - 52° = 38°$

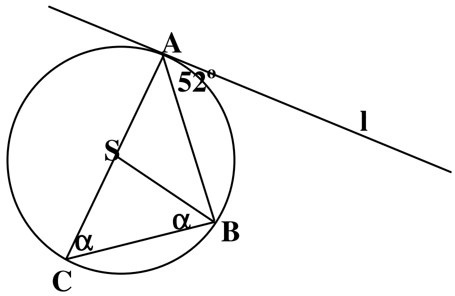
$\sphericalangle CAB$ – wpisany $\sphericalangle CAB$ – środkowy

$\sphericalangle CAB = 2 \cdot 38° = 76°$

Trójkąt CBS równoramienny

$\alpha + \alpha + 76° = 180° \qquad 2\alpha = 180° - 76° = 104°$

$\alpha = \frac{104°}{2} = 52°$



(C)

Zad 25. Dwukrotny rzut kostką $\overline{\overline{\Omega}} = 6 \cdot 6 = 36$

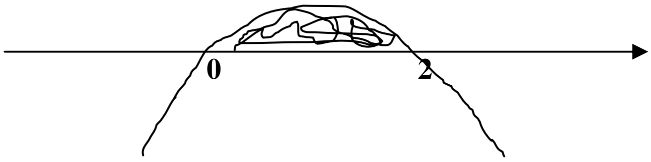
A – suma oczek wynosi 6 $A = \{1+5;\ \ 2+4;\ \ 3+3;\ \ 4+2;\ \ 5+1\}$

$\overline{\overline{A}} = 5 \qquad P(A) = \frac{5}{36}$ **(C)**

Zadania otwarte

Zad 26. $-5x^2 + 10x > 0$

$x(-5x+10) > 0$ pierwiastki $x_1 = 0 \ \ \vee \ \ -5x + 10 = 0 \ \Longrightarrow \ -5x = -10 \ \Longrightarrow \ x_2 = 2$



Odp: $x \in (0;\ \ 2)$

Zad 27. $\frac{5x+6}{x} = x \qquad x \neq 0$

$\frac{5x+6}{x} - x = 0$

$\frac{5x+6}{x} - \frac{x\cdot x}{x} = 0$

$\frac{5x+6-x^2}{x} = 0$

$5x + 6 - x^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -x^2 + 5x + 6 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4\cdot(-1)\cdot 6 = 25 + 24 = 49 \qquad \sqrt{49} = 7$

$x_1 = \frac{-5-7}{2\cdot(-1)} = \frac{-12}{-2} = 6 \qquad x_2 = \frac{-5+7}{2\cdot(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$

Zad 28. $S = (7;\ \ 2) \quad B = (-3;\ \ 11) \quad A = (x;\ \ y)$

$x_s = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad 7 = \frac{x+(-3)}{2} \qquad 14 = x - 3 \qquad x = 17$

$y_s = \frac{y_A + y_B}{2} \qquad 2 = \frac{y+11}{2} \qquad 4 = y + 11 \qquad y = -7$

Odpowiedź: współrzędne początku odcinka $A = (17;\ \ -7)$

Zad 29. $a_3 = \frac{32}{3}$ $\quad a_2 = 16 \quad q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{32}{3}}{16} = \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{2}{3}$

$a_2 = a_1 \cdot q \quad 16 = a_1 \cdot \frac{2}{3} \quad a_1 = 16 : \frac{2}{3} \quad a_1 = 16 \cdot \frac{3}{2} = 8 \cdot 3 = 24$

Odpowiedź: Pierwszy wyraz ciągu $a_1 = 24$ a iloraz $q = \frac{2}{3}$

Zad 30. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 =$

$= \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha =$

$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 2 \cdot 1 = 2$

Zad 31. $\left(11 - \sqrt{21}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(11 + \sqrt{21}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{42}$ lub inaczej

$\sqrt{\left(11 - \sqrt{21}\right)} + \sqrt{\left(11 + \sqrt{21}\right)} = \sqrt{42}$ podnosząc równość do kwadratu czyli

$\left(\sqrt{\left(11 - \sqrt{21}\right)} + \sqrt{\left(11 + \sqrt{21}\right)}\right)^2 = \left(\sqrt{42}\right)^2$ i pamiętając o wzorach skróconego mnożenia mamy:

$11 - \sqrt{21} + 2 \cdot \sqrt{\left(11 - \sqrt{21}\right)\left(11 + \sqrt{21}\right)} + 11 + \sqrt{21} = 42$

$22 + 2 \cdot \sqrt{11^2 - \sqrt{21}^2} = 42$

$22 + 2 \cdot \sqrt{121 - 21} = 42 \quad \Rightarrow \quad 22 + 2 \cdot \sqrt{100} = 42 \quad \Rightarrow \quad 22 + 2 \cdot 10 = 42$

i ostatecznie otrzymaliśmy równość prawdziwą $22 + 20 = 42$

Zad 32. $y = ax^2 + bx + c$ i jest podany wierzchołek $(p; \; q) = \left(\frac{3}{2}; \; -1\right)$ oraz punkt na wykresie

$A = (3; \; 8)$ Korzystając z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej mamy:

$y = a(x - 1{,}5)^2 - 1$ Teraz wstawiając do wzoru punkt $A = (3; \; 8)$ mamy:

$8 = a(3 - 1{,}5)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad 8 = a \cdot (1{,}5)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad 8 = 2{,}25a - 1$

$2{,}25a = 8 + 1 \quad \Rightarrow \quad 2{,}25a = 9 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{9}{2{,}25} = \frac{9}{2\frac{1}{4}} = 9 : \frac{9}{4} = 9 \cdot \frac{4}{9} = 4$

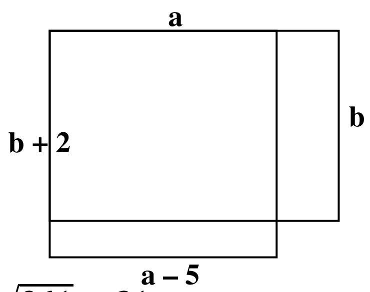
$y = 4(x - 1{,}5)^2 - 1$ Teraz trzeba to doprowadzić do postaci ogólnej

$4(x - 1{,}5)^2 - 1 = 4(x^2 - 3x + 2{,}25) - 1 = 4x^2 - 12x + 9 - 1 = 4x^2 - 12x + 8$

Odpowiedź $y = 4x^2 - 12x + 8$ czyli $a = 4; \quad b = -12; \quad c = 8$

Zad 33. $P = a \cdot b = 228$ oraz $a - 5 = b + 2$

$\begin{cases} a \cdot b = 228 \\ a - 5 = b + 2 \end{cases}$



$\begin{cases} a = \frac{228}{b} \\ a = b + 7 \end{cases}$

$\frac{228}{b} = b + 7 | \cdot b$

$228 = b^2 + 7b$

$b^2 + 7b - 228 = 0$

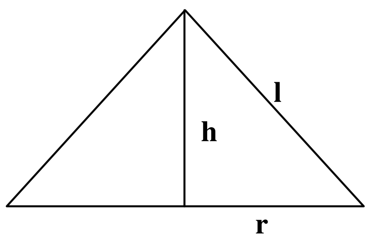
$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-228) = 49 + 912 = 961 \quad \sqrt{961} = 31$

$b_1 = \frac{-7-31}{2} = \frac{-38}{2} = -19 \quad b_2 = \frac{-7+31}{2} = \frac{24}{2} = 12$

Wynik $b_1 = -19$ nie spełnia warunków zadania. Dla $b_2 = 12$ mamy $a = \frac{228}{b} = \frac{228}{12} = 19$

Odpowiedź: Szukany prostokąt ma wymiary $a = 19; \quad b = 12$

Zad 34.



$V = 18\pi\sqrt{2} \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

Jeżeli przekrój jest trójkątem prostokątnym to $r = h$

$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = 18\pi\sqrt{2} | \cdot 3$

$\pi r^3 = 54\pi\sqrt{2} | : \pi$

$r^3 = 54\sqrt{2} \quad r = \sqrt[3]{54\sqrt{2}} = \sqrt[3]{27 \cdot 2\sqrt{2}} = 3\sqrt[3]{\sqrt{8}} = 3\sqrt{\sqrt[3]{8}} = 3\sqrt{2}$

$h = r = 3\sqrt{2}$ tworząca l jest przekątną kwadratu czyli $l = r\sqrt{2}$

$l = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot 2 = 6$
$P_{pc} = \pi r^2 + \pi r l = \pi\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \pi \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 = 18\pi + 18\sqrt{2}\pi = 18\pi \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)$
Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej stożka wynosi $18\pi\left(1 + \sqrt{2}\right)$